АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А.В. СПИВАКОВСКИЙ

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ИМЕЮЩИХ C-СЕПАРИРУЮЩИЕ ПОДГРУППЫ

Препринт 84.13

Киев
Институт математики АН УССР
1984

УДК 519.41/47

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ИМЕЮЩИХ С - СЕПАРИРУЮЩИЕ ПОДГРУППЫ: Препринт 84.13 / Спиваковский А.В.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.- 63 с.

В работе рассматривается новое обобщение конечных вполне факторизуемых групп на основе следующего определения.

Пусть С - свойство группы быть дополняемой во всей группе G. В соответствии с работой С.Н.Черникова /Группы, имеющие сепарирующие подгруппы.-В кн.:Группы с заданными свойствами подгрупп.-Киев, Ин-т математики АН УССР, 1973, с.6-14./, собственную подгруппу N группы G /т.е. отличную от G подгруппу N / назовем С - сепарирующей подгруппой группы G, если каждая подгруппа группы G, не содержащаяся в группе N, дополнима во всей группе G.

В настоящей работе получено полное описание всех конечных групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе ее С - сепарирующую подгруппу. Оказалось, что существует 2 типа таких групп и все они разрешимы.

В в е д е н и е

В теории абстрактных групп одной из важнейших задач является изучение групп по заданным свойствам той или иной системы подгрупп. В этом направлении С.Н.Черниковым и рядом его учеников были проведены фундаментальные исследования. Большинство результатов, полученных в процессе этих исследований, изложены в работе [I].

С выходом в 1973 году работы С.Н.Черникова [2] в этом направлении открылись новые, очень интересные возможности. Одной из таких возможностей является рассмотрение многих уже известных классов групп с совершенно новых позиций /т.е. позиций, отличных от уже установившихся к выходу работы [2]/, что позволяет обобщать, и весьма существенно, ранее полученные результаты, а как следствие, получать новые, более широкие классы групп. Наглядной иллюстрацией к вышесказанному является работа [3]. Уже эта работа подтверждает возможность расширения, причем весьма существенного, класса вполне факторизуемых групп с помощью понятия "сепарирующей подгруппы", впервые предложенного С.Н.Черниковым в работе [2].

Автором настоящей работы было проведено исследование, связанное с понятием "сепарирующей подгруппы".

Пусть C - свойство подгруппы быть дополняемой во всей группе G. В соответствии с работой [2], собственную подгруппу N группы G /т.е.отличную от G подгруппу N/ назовем C - сепарирующей подгруппой группы G, если каждая подгруппа группы G, не содержащаяся в N, дополняемая во всей группе G. Пересечение любого множества C - сепарирующих подгрупп, очевидно, является C - сепарирующей подгруппой. Будем называть C - сепаратором группы G пересечение $C(G)$ всех C - сепарирующих подгрупп группы G /см. [2]/. Группы с тривиальным C - сепаратором - в точности вполне факторизуемые группы.

В предлагаемой читателю работе изучаются конечные группы, имеющие хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую группу. Отметим при этом, что дополняемость одной C - сепарирующей подгруппы группы G не влечет дополняемости остальных C - сепарирующих подгрупп группы G.

Пример I. Пусть $G = (\langle z \rangle \times \langle y \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $z^p = y^p = x^p = 1$, $z^x = z$, $y^x = zy$, p - простое число.

Нетрудно убедиться, что группы $B_1 = \langle z \rangle \times \langle y \rangle$ и $B_2 = \langle z \rangle$ являются C - сепарирующими подгруппами группы G. Вместе с этим подгруппа B_1 дополняема в группе G, а подгруппа B_2 недополняема в G.

В результате проведенного автором исследования получено:

I/ полное описание силовских p - подгрупп конечной группы, имеющей хотя бы одну дополняемую во всей группе C- - сепарирующую подгруппу /теорема 3.I./;

2/ полное описание конечных разрешимых групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую подгруппу /теорема 5.4./;

3/ доказательство разрешимости конечных групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую подгруппу /теорема 6.I./.

Тема работы предложена автору С.Н.Черниковым.

Бесконечные группы в работе не рассматриваются, и везде ниже, употребляя название "группа", мы имеем в виду конечную группу.

Обозначения:

I/ $\langle a \rangle$ - подгруппа, порожденная элементом a;

2/ $\langle R \rangle$ - подгруппа, порожденная множеством R;

3/ $C_T(K)$ - централизатор подгруппы K в группе T;

4/ $Z(G)$ - центр подгруппы G;

5/ G_p - силовская p - подгруппа группы G;

6/ $\pi(G)$ - множество всех простых делителей порядков всех элементов группы G;

7/ $N_B(A)$ - нормализатор подгруппы A в группе B;

8/ $\Phi(G)$ - подгруппа Фраттини группы G;

9/ G' - коммутант группы G;

I0/ $(|A|,|B|)$ - наибольший общий делитель порядков групп A и B;

11/ E - тривиальная группа ;
12/ $\Omega_1(G)$ - нижний слой группы G ;

I. Определения и вспомогательные утверждения

1. Нетривиальная группа G тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она представима в виде полупрямого произведения $G = A \leftthreetimes B$ двух своих абелевых вполне факторизуемых подгрупп A и B, что все множители хотя бы одного разложения подгруппы A в прямое произведение циклических групп простых порядков инвариантны в G [2].

Теорема 1.1. из [4]. Если группа G разлагается в полупрямое произведение $G = U \leftthreetimes B$ абелевой подгруппы U, являющейся прямым произведением инвариантных в G циклических групп простых порядков, и вполне факторизуемой подгруппы B, то группа G вполне факторизуема.

Определение 1 [5]. Разрешимая группа с абелевыми силовскими подгруппами называется A - группой.

Теорема 1.2. из [6]. Нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если для любого простого делителя p индекса $|G:K|$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.

Лемма 1.1. из [6]. Пусть $G = G_1 G_2$. Тогда для любого простого числа p существуют такие силовские p - подгруппы P, P_1 и P_2 соответственно в G, G_1 и G_2, что $P = P_1 P_2$.

Лемма 1.2 из [5]. В A - группе пересечение коммутанта и центра тривиально.

2. Из теоремы Ито [7] о группе разложимой в произведение двух абелевых подгрупп следует, что бипримарная A -группа двуступенно разрешима.

Теперь для удобства приведем следующее утверждение /очевидно, являющееся следствием леммы 6.3, гл. 5 из [8], которое неоднократно используется в настоящей работе.

П р е д л о ж е н и е I.I. Пусть конечная группа $G = Q \leftthreetimes \langle x \rangle$, где Q - элементарная абелева q-подгруппа и $(q, |x|) = 1$. Если $|x| / (q-1)$, то группа Q разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе G.

П р е д л о ж е н и е I.2. Пусть конечная разрешимая группа $G = Q \leftthreetimes (A \times B)$, где Q - элементарная абелева q - подгруппа и $(|Q|, |A \times B|) = 1$. Если $Q = \langle u_1 \rangle \times \ldots \times \langle u_n \rangle = \langle w_1 \rangle \times \ldots \times \langle w_n \rangle$, где

I/ $u_i^q = w_i^q = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2/ подгруппы $\langle u_i \rangle$ - A - допустимы, а подгруппы $\langle w_i \rangle$ - B - допустимы, $i = 1, 2, \ldots, n$,

то группа Q разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не теряя общности рассуждений, полагаем, что $C_{A \times B}(Q) = E$ и Q - минимальный нормальный делитель группы G. Тогда в силу условий настоящего предложения группы A и B изоморфны некоторым подгруппам конечной группы всех диагональных матриц над полем характеристики q. Следовательно, группы A и B абелевы, а поэтому абелева и вся группа $A \times B$. Теперь ввиду минимальности подгруппы Q легко получается равенство $C_Q(\langle a \rangle) = E$ для любого элемента a из группы $A \times B$. Значит, G - группа Фробениуса с дополнительным множителем $A \times B$, а следовательно, $A \times B$ - циклическая группа. Но тогда $(|A|, |B|) = 1$, а поэтому, очевидно, $|A \times B| / (q-1)$. Теперь в силу предложения I.I. группа Q разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе G.

Предложение I.2. доказано.

Отметим теперь следующий очевидный факт.

П р е д л о ж е н и е I.3. Если группа G имеет хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу, то в группе G существует элемент простого порядка, не принадлежащий сепаратору $C(G)$ группы G.

Рассмотрим в заключение этого параграфа следующие две леммы.

Л е м м а I.3. Пусть G - конечная группа, имеющая C - сепарирующие подгруппы. Тогда $C(G) \triangleleft G$.

Доказательство леммы I.3. непосредственно получается из работы [2].

Л е м м а I.4. Пусть G - группа, имеющая хотя бы одну C - сепарирующую подгруппу, дополняемую в G. Тогда любой гомоморфный образ группы G будет иметь хотя бы одну C - - сепарирующую подгруппу, дополняемую в нем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $N \neq E$, $N \triangleleft G$, $\overline{G} = G/N$ и $\overline{H} = HN/N$ - образ подгруппы H в группе $\overline{G}$, где H - дополняемая в группе G ее C - сепарирующая подгруппа. Пусть $\overline{K} = \underline{K}N/N$ есть подгруппа группы $\overline{G}$, не лежащая в группе $\overline{H}$. Тогда $K \not\leq HN$, а следовательно, $K < H$. Значит, $G = KF$, где $K \cap F = E$. Далее, $G/N = (KN/N) \cdot (FN/N)$, причем $(KN) \cap (FN) = N$. Таким образом, подгруппа $\overline{K} = KN/N$ дополняема в группе $\overline{G}$. В силу произвольности выбора подгруппы $\overline{K}$ получаем, что $\overline{H}$ - C - сепарирующая подгруппа группы $\overline{G}$. Более того, так как подгруппа H дополняема в группе G, то, очевидно, ее образ $\overline{H}$ в группе $\overline{G}$ также дополняем.

Лемма I.4. доказана.

§ 2. Абелевы и примарные конечные группы, имеющие дополняемые в них C -сепарирующие подгруппы

П р е д л о ж е н и е 2.I. Конечная абелева группа G тогда и только тогда имеет хотя бы одну дополняемую в G C - сепарирующую подгруппу, когда группа G представима в виде прямого произведения элементарных абелевых подгрупп.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Из предложения I.3. следует, что в группе G существует элемент x простого порядка, не принадлежащий сепаратору $C(G)$ группы G. Тогда $G = \langle x \rangle \times T$. Теперь для любой подгруппы K из группы T получаем, что $G = (\langle x \rangle \times K) \times D =$

$= K \times (\langle x \rangle \times D)$. Следовательно, любая подгруппа группы T дополняема в T. Т.е. T - вполне факторизуемая абелева группа. А значит, вся группа G разлагается в прямое произведение элементарных абелевых p - подгрупп.

Необходимость доказана.

Достаточность очевидна, т.к. сепаратор $C(G)$ в силу вполне факторизуемости группы G тривиален.

Предложение 2.1. доказано.

Предложение 2.2. Пусть конечная группа G имеет хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу. Тогда центр $Z(G)$ группы G представим в виде прямого произведения элементарных абелевых p - подгрупп.

Доказательство. Пусть x - элемент простого порядка, не лежащий в сепараторе $C(G)$ /наличие такого элемента непосредственно следует из предложения 1.3./. Рассмотрим следующие случаи:

1. $x \in Z(G)$.

Пусть D - произвольная подгруппа центра $Z(G)$ группы G. Если $x \in D$, то, очевидно, подгруппа D дополняема в группе $Z(G)$. Если $x \notin D$, то $Z(G) = (\langle x \rangle \times D) \times K = (\langle x \rangle \times K) \times D$. Следовательно, подгруппа D всегда дополняема в центре $Z(G)$ группы G. В силу произвольности ее выбора получаем, что $Z(G)$ - абелева вполне факторизуемая группа, а значит, $Z(G)$ представима в виде прямого произведения элементарных абелевых p - подгрупп.

Случай 1 рассмотрен.

2. $x \notin Z(G)$.

Рассмотрим группу $F = \langle x \rangle \times Z(G)$. Для произвольной подгруппы $D \subset Z(G)$ имеем, что $F = (\langle x \rangle \times D) \times K = (\langle x \rangle \times K) \times D$. Поэтому группа $Z(G)$, в силу произвольности выбора подгруппы D, является абелевой вполне факторизуемой, а следовательно, $Z(G)$ представима в виде прямого произведения элементарных абелевых p - подгрупп.

Случай 2 рассмотрен.

Предложение 2.2. доказано.

Теперь сформулируем основное предложение настоящего параграфа, дающее полное описание примарных групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую подгруппу.

Теорема 2.1. p - Группа G тогда и только тогда имеет хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу, когда она является группой одного из следующих типов:

1/ G - элементарная абелева p - подгруппа;

2/ $G = A \leftthreetimes \langle x \rangle$ - неабелева группа, где A - элементарная абелева p - подгруппа и $x^p = 1$.

Доказательство. Необходимость. Ввиду предложения 1.3. в группе G существует элемент x простого порядка, не принадлежащий сепаратору $C(G)$ группы G. Рассмотрим следующие случаи:

1. $x \in Z(G)$.

В этом случае, очевидно, $G = \langle x \rangle \times \mathcal{D}$. Так как подгруппа $\langle x \rangle \times \Phi(\mathcal{D})$ дополняема в группе G, то $G = (\langle x \rangle \times \Phi(\mathcal{D})) \leftthreetimes K = \Phi(\mathcal{D}) \leftthreetimes (\langle x \rangle \times K)$. Из дополняемости подгруппы Фраттини $\Phi(\mathcal{D})$ группы $\mathcal{D}$ во всей группе G следует ее дополняемость и в группе $\mathcal{D}$. Значит, $\Phi(\mathcal{D}) = E$ и $\mathcal{D}$ - вполне факторизуемая группа. Следовательно, G - вполне факторизуемая группа, а поэтому G - элементарная абелева p - группа.

Случай 1 рассмотрен.

2. $x \notin Z(G)$.

В этом случае, очевидно, $G = (\langle x \rangle \times Z(G)) \cdot \mathcal{D}$, где $(\langle x \rangle \times Z(G)) \cap \mathcal{D} = E$, откуда в силу максимальности подгруппы $Z(G) \overset{\circ}{\times} \mathcal{D}$ в p - группе G получаем равенство $G = (Z(G) \overset{\circ}{\times} \mathcal{D}) \leftthreetimes \langle x \rangle$. Ввиду предложения 2.2. центр $Z(G)$ группы G является элементарной абелевой p - группой. Значит, подгруппа Фраттини $\Phi(Z(G) \overset{\circ}{\times} \mathcal{D})$ группы $Z(G) \times \mathcal{D}$ совпадает с группой $\Phi(\mathcal{D})$. Далее, очевидно, центр $Z(Z(G) \times \mathcal{D})$ группы $Z(G) \times \mathcal{D}$ совпадает с группой $Z(G) \times Z(\mathcal{D})$. Значит, $\Phi(\mathcal{D}) \cap (Z(G) \times Z(\mathcal{D})) = (\Phi(\mathcal{D}) \cap Z(\mathcal{D}))$ - группа, инвариантная во всей группе G. Если $\Phi(\mathcal{D}) \cap Z(\mathcal{D}) \neq E$, то по предложению I.6. из [I] в этом пересечении найдется элемент перестановочный с элементом x и отличный от 1. Но это противоречит тому, что $Z(D) \cap Z(D) = E$. Значит, $\Phi(D) \cap Z(D) = E$, а следовательно, D - элементарная абелева p - подгруппа. Таким образом, G - группа, описанная в п. 2/теоремы 2.I.. Случай 2 рассмотрен, а вместе с ним и закончено доказательство необходимости.

Достаточность. Если G - элементарная абелева группа, то, очевидно, $C(G) = E$.

Если G - группа, описанная в п. 2/теоремы 2.I., то, очевидно, A - дополняемая в группе G ее C -сепарирующая подгруппа. Достаточность доказана.

Доказательство теоремы 2.I. закончено.

Примечание I. Мимоходом, при доказательстве необходимости теоремы 2.I. нами установлено, что при условиях п. 2/ этой теоремы для любого элемента x простого порядка, не лежащего в сепараторе $C(G)$ группы G, найдется инвариантная элементарная абелева подгруппа, дополняющая подгруппу $\langle x \rangle$ в группе G.

§ 3. Силовские p - подгруппы конечной группы, имеющей дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу

В этом параграфе устанавливается строение силовских подгрупп конечной группы, имеющей хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу. Кроме этого приводится строение силовских подгрупп дополняемой и инвариантной во всей группе ее C - сепарирующей подгруппы.

Теорема 3.I. Пусть G - группа, имеющая хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу. Тогда ее произвольная силовская подгруппа является либо элементарной абелевой, либо неабелевой группой, представимой в виде полупрямого произведения $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ двух подгрупп A и $\langle b \rangle$, первая из которых-элементарная абелева, а вторая является циклической подгруппой простого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной силовской P-подгруппы группы G возможны следующие случаи:

1/ $P \subset C(G)$ или

2/ $P \cap C(G) = E$ или

3/ $P \cap C(G) \neq E, P \nsubseteq C(G)$.

В первом случае в силу теоремы 4.2.4. [9] $N_G(P) \subseteq C(G)$, поскольку по лемме 1.3. $C(G) \triangleleft G$. Но тогда существует элемент $x \notin C(G)$ такой, что $x \notin N_G(P)$ и

$$(|x|, |P|) = 1 . \qquad /1/$$

Следовательно, $P \leftthreetimes \langle x \rangle = (\Phi(P) \leftthreetimes \langle x \rangle) \cdot P_1$, где $(\Phi(P) \leftthreetimes \langle x \rangle) \cap P_1 = E$. Значит, P - элементарная абелева группа, так как ввиду соотношения /1/ $P = \Phi(P) \leftthreetimes P_1$.

Во втором случае, поскольку любая подгруппа из P дополняема во всей группе G, то эта подгруппа дополняема и в самой группе P. Значит, P - элементарная абелева группа в силу ее вполне факторизуемости.

В третьем случае из того, что вне сепаратора $C(G)$ по предложению 1.3. существует элемент простого порядка, лежащий в силовской подгруппе P группы G, получаем равенство $P = A \leftthreetimes \langle x \rangle$. Теперь в силу теоремы 2.1. получаем, что P - элементарная абелева p - подгруппа, либо P - неабелева группа, у которой множитель A можно выбрать элементарной абелевой группой. Все случаи рассмотрены.

Теорема 3.1. доказана.

Т е о р е м а 3.2. Любая силовская подгруппа сепаратора $C(G)$ конечной группы G будет группой одного из следующих типов:

1/ элементарной абелевой p - подгруппой;

2/ группой представимой в виде прямого произведения $S \times \langle y \rangle$ двух подгрупп S и $\langle y \rangle$, первая из которых-элементарная абелева 2 - группа, а вторая является циклической группой 4-го порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K - произвольная силовская подгруппа сепаратора $C(G)$ группы G, и пусть элемент $x \in G$, $x \notin C(G)$, где $x^p = 1$ и p - - простое число. Обозначим группу $C(G) \leftthreetimes \langle x \rangle$ через F.

Если $(|K|,|x|)=1$, то K - силовская подгруппа группы F, а следовательно, в силу теоремы 4.2.4. из [9] $N_F(K) \nleq C(G)$. Значит, существует элемент $t \in F$ такой, что $K^t = K$, $t \notin C(G)$, $(|K|,|t|)=1$. Тогда группа $L = K \lambda \langle t \rangle$ обладает следующим разложением: $L = (\Phi(K) \lambda \langle t \rangle) \cdot D$, где $(\Phi(K)\lambda\langle t\rangle) \cap$ $\cap D = E$. Поскольку $(|K|,|t|)=1$, то $K = \Phi(K) \lambda D$, откуда $\Phi(K) = E$, а значит, K - элементарная абелева группа.

Пусть теперь $(|K|,|x|) \neq 1$. Тогда в группе F найдется силовская p - подгруппа R такая, что $x \in R$. Очевидно, $R = N \lambda \langle x \rangle$, где $N = R \cap C(G)$. С другой стороны, ввиду примечания I, $R = T_x \lambda \langle x \rangle$, где T_x - элементарная абелева p - подгруппа, являющаяся очевидно C - сепарирующей подгруппой группы R. Теперь, если T_x - сепаратор группы R, то в силу его единственности и того, что N - C - сепарирующая подгруппа группы R, непосредственно получаем равенство $T_x = N$. Тогда поскольку K и N - силовские p - подгруппы группы $C(G)$, то в силу их сопряженности K - элементарная абелева p - подгруппа. Осталось рассмотреть случай, когда сепаратор $C(R)$ группы R строго лежит в группе T_x. Тогда легко найти элемент $y \in T_x$ такой, что $y \notin C(R)$ и $y^p = 1$. В силу примечания I $R = T_y \lambda \langle y \rangle$, где T_y - элементарная абелева p - группа, причем, очевидно, $T_x \neq T_y$. Если R - абелева группа, то ввиду предложения 2.I. получаем, что вся группа R - элементарная абелева, а значит, и N - элементарная абелева группа, откуда в силу сопряженности подгрупп N и K получаем элементарную абелевость группы K. Если R - неабелева группа, то, очевидно, $T_x \cap T_y = Z(R)$ и $|R : Z(R)| = p^2$. Следовательно, $R = (Z(R) \times \langle y \rangle) \lambda \langle x \rangle$, где $xyx^{-1} =$ $= zy^{\alpha}$, $z \in Z(R)$, $0 < \alpha < p$, откуда $R = Z_1 \times ((\langle z \rangle \times \langle y \rangle) \lambda \langle x \rangle)$ и $Z(R) = Z_1 \times \langle z \rangle$. Теперь в силу результатов § 4.3. из [9] имеем, что если $p=2$, то $(\langle z \rangle \times \langle y \rangle) \lambda \langle x \rangle$ - группа диэдра порядка 8, и если $p>2$, то $((\langle z \rangle \times \langle y \rangle) \lambda$ $\lambda \langle x \rangle)$ - группа экспоненты p. Рассмотрим два случая: I/ $p=2$ и 2/ $p>2$.

В первом случае, поскольку $Z(R) \subset N$ и $|N : Z(R)| = 2$, то N - абелёва группа, а так как $(\langle z \rangle \times \langle y \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle = \langle xy \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$, где xy - элемент 4-го порядка, то N является либо элементарной абелевой 2-группой, либо группа N представима в виде прямого произведения $Z_1 \times \langle xy \rangle$. Но так как группы N и K сопряжены, то и K является либо элементарной абелевой 2-группой, либо группа K представима в виде прямого произведения двух подгрупп, первая из которых элементарная абелева 2-группа, а вторая является циклической подгруппой 4го порядка. Случай I рассмотрен.

Во втором случае, поскольку $Z(R) \subset N$ и $|N : Z(R)| = p$, то N - абелева группа. А так как в группе N все элементы имеют порядок p, то N - элементарная абелева группа. В силу сопряженности подгрупп N и K группа K является элементарной абелевой p - подгруппой. Случай 2 рассмотрен.

Теорема 3.2. доказана.

Примечание 2. При доказательстве теоремы 3.2. мимоходом нами установлено, что если в сепараторе $C(G)$ существует силовская 2-подгруппа, являющаяся прямым произведением $S \times \langle b \rangle$ элементарной абелевой 2-группы S и циклической подгруппы $\langle b \rangle$ четвертого порядка, то элемент $b = xy$, где $x^2 = y^2 = 1$, $x \notin C(G)$. В этом случае $(S \times \langle xy \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle = Z_1 \times ((\langle z \rangle \times \langle y \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где $y^x = zy$, $z^x = z$, $S \times \langle xy \rangle = Z_1 \times \langle xy \rangle$.

Следствие 3.I. Любая силовская подгруппа инвариантной и дополняемой в группе G ее C - сепарирующей подгруппы имеет строение, указанное в первом или втором пунктах теоремы 3.2..

Доказательство следствия 3.I. непосредственно получается из теоремы 3.2..

Следующий результат, несмотря на свою простоту, является одним из центральных в настоящей работе, поскольку в произвольной конечной разрешимой группе, имеющей хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу, всегда найдется дополняемая и инвариантная C - сепарирующая подгруппа простого индекса. Этот факт позволяет в дальнейшем исследовании всегда работать с конкретной C - сепарирующей подгруппой данной конечной разрешимой группы.

Л е м м а 3.1. Пусть G - конечная разрешимая группа, имеющая хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу. Тогда $G = M \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $M - C$ - сепарирующая подгруппа группы G и $x^p = 1$, p - простое число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x - элемент простого порядка, не лежащий в C - сепараторе $C(G)$ группы G . И $E \lhd \ldots \lhd C(G) \lhd \ldots \lhd T \lhd G$ - композиционный ряд группы G . Очевидно, $T - C$ - сепарирующая подгруппа группы G . Если $x \in T$, то, очевидно, $G = T \leftthreetimes D$, откуда D - подгруппа простого порядка. Если же $x \notin T$, то $G = (T \leftthreetimes \langle x \rangle) \leftthreetimes D$, откуда в силу максимальности подгруппы T в группе G имеем равенство $D = E$.

Лемма 3.1. доказана.

Теперь рассмотрим результаты, дающие полную информацию о силовской базе

1/ конечной разрешимой группы G , имеющей хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу,

2/ инвариантной и дополняемой в группе G ее C - сепарирующей подгруппы.

Л е м м а 3.2. Пусть G - конечная разрешимая группа, имеющая хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу. Если $G = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$, где P_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, - попарно- перестановочные силовские подгруппы группы G , то либо

1/ P_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, - элементарные абелевы группы, либо

2/ $P_1, P_2, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n$ - элементарные абелевы подгруппы, а $P_j = A \leftthreetimes \langle b \rangle$, где A - элементарная абелева и b - элемент простого порядка.

Доказательство. Ввиду леммы 3.I. $G = M \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $x^p = 1$, p - простое число и $M - C$ - сепарирующая подгруппа группы G. Пусть P - произвольная силовская p - подгруппа группы M такая, что $(|P|, |x|) = 1$. Тогда P - силовская p - подгруппа группы G, а значит по теореме 4.2.4. из [9] $N_G(P) \not\leq M$. Т.е. найдется элемент $y \notin M$ такой, что $\langle P, y \rangle = P \leftthreetimes \langle y \rangle$. Тогда

$$P \leftthreetimes \langle y \rangle = (\Phi(P) \leftthreetimes \langle y \rangle) \cdot P_1, \quad /2/$$

где $P_1 \cap (\Phi(P) \leftthreetimes \langle y \rangle) = E$ /разложение /2/ возможно в силу дополняемости подгруппы $\Phi(P) \leftthreetimes \langle y \rangle$ даже во всей группе G, поскольку $y \notin C(G)$ /. Но так как $(|P|, |x|) = 1$, то $P = \Phi(P) \leftthreetimes P_1$. Значит, P - элементарная абелева группа.

Таким образом, в группе G осталась только одна не рассмотренная нами силовская p - подгруппа Q группы G. Ввиду леммы I.I. из [6] $Q^g = Q_1 \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $g \in G$, Q_1 - силовская p - подгруппа группы M. Если $Q_1 \neq E$, то по теореме 3.I. силовская подгруппа $Q_1 \leftthreetimes \langle x \rangle$ группы G либо элементарная абелева, либо полупрямое произведение элементарной абелевой группы на подгруппу простого порядка. Если же $Q_1 = E$, то, очевидно, все силовские подгруппы группы G являются элементарными абелевыми группами.

Лемма 3.2. доказана.

Лемма 3.3. Пусть G - конечная разрешимая группа, имеющая хотя бы одну инвариантную и дополняемую в ней C -сепарирующую подгруппу M. Если $M = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$, где P_i, $i = 1, 2, \dots, n$, - силовские попарно перестановочные между собой подгруппы группы M, то либо

I. P_i, $i = 1, 2, \dots, n$, - элементарные абелевы группы, либо

2. $P_1, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n$ - элементарные абелевы группы, а P_j - 2-группа вида $S \times \langle y \rangle$, где S -элементарная абелева 2-группа и $\langle y \rangle$ - циклическая группа 4-го порядка, причем P_j не является силовской 2-подгруппой группы G.

Доказательство. По условию $G = M \leftthreetimes D$. Так как $D \cap C(G) = E$, то D - вполне факторизуемая группа. Рассмотрим группу $G_0 = M \leftthreetimes \langle x \rangle$, где x -элемент простого порядка из группы D. Пусть P - произвольная силовская подгруппа группы M такая, что $(|P|, |x|) = 1$. Тогда P - силовская подгруппа группы G_0, а следовательно, по теореме 4.2.4. из [9] $N_{G_0}(P) \nsubseteq M$. Значит, существует элемент $y \in M$ такой, что $\langle P, y \rangle = P \leftthreetimes \langle y \rangle$. Поскольку $y \notin C(G)$, то $P \leftthreetimes \langle y \rangle = (\Phi(P) \leftthreetimes \langle y \rangle) \cdot P_1$, где $(\Phi(P) \leftthreetimes \langle y \rangle) \cap P_1 = E$. Но тогда так как $(|P|, |y|) = 1$, то $P = \Phi(P) \leftthreetimes P_1$. Значит, P - элементарная абелева группа. Если $(|M|, |x|) \neq 1$, то осталась еще одна силовская подгруппа группы M такая, что ее порядок не взаимно прост с порядком группы $\langle x \rangle$. Тогда в силу следствия 3.1. эта силовская подгруппа либо элементарная абелева, либо представима в виде прямого произведения двух подгрупп, первая из которых элементарная абелева 2-группа, а вторая является циклической группой 4-го порядка.

Лемма 3.3. доказана.

Следующий результат, подводящий итоги настоящего параграфа, имеет большое значение для окончательного установления строения конечных разрешимых групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе ее C - сепарирующую подгруппу.

Теорема 3.3. Если конечная разрешимая группа имеет хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу, то она представима в виде полупрямого произведения

$$G = M \leftthreetimes \langle x \rangle$$

двух подгрупп M и $\langle x \rangle$, первая из которых является C -сепарирующей подгруппой группы G, а вторая - циклическая подгруппа простого порядка, причем верно одно из следующих условий:

I/ все силовские подгруппы группы M являются элементарными абелевыми, либо

2/ силовская 2-подгруппа группы G представима в виде прямого произведения двух подгрупп Z_1 и $(\langle z\rangle \times \langle y\rangle)\lambda\langle x\rangle$, где Z_1 - элементарная абелева 2-группа, $z^2 = y^2 = x^2 = 1$, $z^x = z$, $y^x = zy$ и $Z_1 \times \langle xy\rangle$ - силовская 2-подгруппа группы M, а остальные силовские p - подгруппы, $p > 2$, группы G являются элементарными абелевыми.

Доказательство теоремы 3.3. непосредственно получается из леммы 3.I., 3.3. и примечания 2.

§ 4. Основные свойства конечных разрешимых групп, имеющих дополняемые в них C - сепарирующие подгруппы

В этом параграфе сформулированы основные вспомогательные результаты, необходимые для полного описания конечных разрешимых групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе ее C - сепарирующую подгруппу.

Л е м м а 4.I. Пусть $G = B\lambda\langle x\rangle$ - конечная разрешимая группа с силовской 2- подгруппой $K = P\lambda\langle x\rangle$, где P - силовская 2- подгруппа группы B и $x^2=1$, причем $K = Z_1 \times ((\langle z\rangle \times \langle y\rangle)\lambda \lambda\langle x\rangle)$, где $Z(K) = Z_1 \times \langle z\rangle$ - элементарная абелева 2- подгруппа, $y^x = zy$, $y^2 = 1$, $P = Z_1 \times \langle xy\rangle$. Если B - C - сепарирующая подгруппа группы G, то дополнение к подгруппе P в группе B является инвариантной подгруппой группы G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку G - разрешимая группа, то $B = P\cdot H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_n$, где H_i - попарно перестановочные между собой и 2-подгруппой P абелевы /см. теорему 3.3./ силовские подгруппы группы G, $i = 1, 2, \ldots, n$. В силу теоремы I.2. из [6] и п 2.§ I настоящей работы $P\cdot H_i = (P_{1i} \times H_{1i})\lambda(P_{2i} \times H_{2i})$, где $P = P_{1i} \times P_{2i}$ и $H_i = H_{1i} \times H_{2i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Т.е. каждая силовская подгруппа H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, представима в виде прямого произведения двух подгрупп, первая из которых инвариантна относительно подгруппы P, а вторая лежит в $N_{\bar H}(P)$, где $\bar H = H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_n$. Таким образом,

$$\bar H = \langle N_{\bar H}(P), R\rangle, \quad /3/$$

где $R - P$ - допустимая подгруппа. Покажем, что

$$P \leftthreetimes N = P \times N, \qquad /4/$$

где $N = N_{\overline{H}}(P)$.

Поскольку $\overline{H}$ - холловская подгруппа группы G, то $\overline{H}^x = \overline{H}^a$, где элемент $a \in P$. Но тогда $\overline{H}^{xa^{-1}} = \overline{H}$. Простой проверкой легко убедиться, что $(xa^{-1})^2 = 1$. Поэтому $G = (P\overline{H}) \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle$, где $\bar{x} = xa^{-1}$. Так как $\overline{H} = \overline{H}^{\bar{x}}$, то, очевидно, $N^{\bar{x}} = N$. Тогда рассмотрим группу $L = P \leftthreetimes (N \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle)$. В силу теоремы 2.3, ч. 5 из [8] $P = C_P(N) \times [P, N]$, причем легко видеть, что $[P, N]^{\bar{x}} = [P, N]$. Поэтому теперь рассмотрим группу $F = [P, N] \leftthreetimes (N \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle)$, естественно полагая, что $[P, N] \neq E$ /т.к. в противном случае соотношение /4/ уже доказано/. В силу того, что индекс $|(P \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle) : Z(P \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle)| = 4$, в группе $[P, N]$ найдется подгруппа M такая, что $M^{\bar{x}} = M$ и $|[P, N] : M| = 2$. Тогда поскольку $([P, N] \leftthreetimes N) - C$ - сепарирующая подгруппа группы F, то $F = (M \leftthreetimes \langle x^g \rangle)(\langle b \rangle N)_2$, где $(M \leftthreetimes \langle x^g \rangle) \cap (\langle b \rangle N) = E$, $g \in F$ и $b^2 = 1$. Если $b \in [P, N]$, то, очевидно, $\langle b \rangle N = \langle b \rangle \leftthreetimes N$. Но так как $|b| = 2$, то $\langle b \rangle \leftthreetimes N = \langle b \rangle \times N$, а это противоречит тому, что $[P, N] \cap C_P(N) = E$. Значит, $b \notin [P, N]$. Но тогда $b = fnx^2$, $n \in N$, $f \neq 1$, $f \in [P, N]$ и $N = ([P, N] \leftthreetimes N) \cap (\langle b \rangle N)$, причем $([P, N] \leftthreetimes N) \triangleleft F$. Тогда $\langle b \rangle N = N \leftthreetimes \langle b \rangle$, откуда $N^{fnx^2} = N$. Отсюда, поскольку $N^{\bar{x}} = N$, то $N^f = N$. Тогда для любого элемента $n \in N$, $n \neq 1$ имеем

$$fnf^{-1} = n_1, \qquad /5/$$

где $n_1 \in N$. С другой стороны,

$$n^{-1}fn = f_1, \qquad /6/$$

где $f_1 \in [P, N]$. Из соотношений /5/ и /6/ следует, что $n^{-1}fnf^{-1} = n^{-1}n_1 = f_1 f^{-1}$, откуда $n^{-1}n_1 = f_1 f^{-1} = 1$, а значит $n = n_1$. Поэтому соотношение /5/ равносильно равенству $fnf^{-1} = n$, что противоречит тривиальности пересечения $C_P(N) \cap [P, N]$. Таким образом, $[P, N] = E$. Т.е. $L = (P \times N) \leftthreetimes \langle x \rangle$. Тогда учитывая соотношение /3/, получаем, что $P\overline{H} = \overline{H} \leftthreetimes P$.

А так как $\overline{H}^{\bar{x}} = \overline{H}$, то группа $\overline{H}$ инвариантна во всей группе G, и вместе с тем является дополнением к подгруппе P в группе B.

Лемма 4.I. доказана.

Следующие три утверждения дают полное описание бипримарных групп нечетного порядка, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе ее C - сепарирующую подгруппу.

Л е м м а 4.2. Пусть конечная разрешимая группа $G = A \leftthreetimes (H \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где $(A \leftthreetimes \langle x \rangle)$ - силовская p - подгруппа группы G, A - элементарная абелева p - подгруппа, $x^p = 1$, p - простое число. Если $(A \leftthreetimes H)$ - C - сепарирующая подгруппа группы G, то группа A разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $(A \leftthreetimes H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M - произвольный минимальный нормальный делитель группы $A \leftthreetimes H$, содержащийся в подгруппе A. Рассмотрим подгруппы $M, M^x, \ldots, M^{x^{p-1}}$. Каждая из них является, очевидно, минимальным нормальным делителем группы $A \leftthreetimes H$, содержащимся в подгруппе A. Отсюда следует, что группа $N = \langle M, M^x, \ldots, M^{x^{p-1}} \rangle$, порожденная подгруппами $M, M^x, \ldots, M^{x^{p-1}}$, разлагается в прямое произведение $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$ некоторого их множества с $M_1 = M$. Покажем теперь, что произвольный минимальный нормальный делитель K, отличный от E, группы $N \leftthreetimes H$, содержащийся в подгруппе N, изоморфен подгруппе M. В самом деле, если K совпадает с одним из множителей $M_1, M_2, \ldots, M_s$, то это утверждение является очевидным, так как все они, очевидно, изоморфны подгруппе M. В ином случае $K \cap M_1 = E$ и потому произведение $K M_1$ прямое. Далее, либо произведение $K \times M_1$ содержит любой из множителей $M_2, \ldots, M_s$ и тогда $N = K \times M_1$, либо для некоторого из них, например, для M_2, имеем $(K \times M_1) \cap M_2 = E$ и тогда получается прямое произведение $K \times M_1 \times M_2$. Продолжая эти рассуждения, получим $N = K \times M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_t$. По известной теореме О.Ю.Шмидта [10] разложение $N = M_1 \times \ldots \times M_s$, и $N = K \times M_1 \times \ldots \times M_t$ центрально изоморфны и потому подгруппа K изоморфна одному из множителей $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_s$, а значит изоморфна подгруппе M. Поэтому для доказательства леммы 4.2. достаточно показать существование в группе N хотя бы одной подгруппы простого порядка, инвариантной относительно подгруппы H. Покажем это в случае, когда подгруппа N имеет непростой порядок.

Вначале рассмотрим группу $L = N \leftthreetimes \langle x \rangle$. В силу сверхразрешимости группы L в нормальном делителе N найдется подгруппа N_1 такая, что $|N : N_1| = p$ и подгруппа N_1 инвариантна во всей группе L.

Далее, пользуясь тем, что $(N \leftthreetimes H)$ - C -сепарирующая подгруппа группы $F = N \leftthreetimes (H \leftthreetimes \langle x \rangle)$, получаем равенство $F = (N_1 \leftthreetimes \langle x \rangle) \cdot \mathcal{D}$, где $(N_1 \leftthreetimes \langle x \rangle) \cap \mathcal{D} = E$. Подгруппа $\mathcal{D}$ содержит, очевидно, подгруппу $\overline{H}$ порядка, равного порядку подгруппы H. Тогда легко видеть, что $(N \leftthreetimes \langle x \rangle) \cap \overline{H} = E$. Но поэтому $\mathcal{D} = \overline{H} \langle n x^{\alpha} \rangle$, где $n \in N$ и $n \neq 1$, $1 \leq \alpha \leq (p-1)$ и $(n x^{\alpha})^p = 1$, либо $\mathcal{D} = \overline{H} \langle n \rangle$, $n \in N$ и $n \neq 1$. Так как порядки подгрупп H и $\overline{H}$ равны, а сами они являются холловскими подгруппами разрешимой группы F, то в группе F найдется элемент f такой, что $\overline{H}^{f} = H$. Следовательно, $H^{f^{-1}} = \overline{H}$. Но так как $f^{-1} = n h x^{\alpha}$, где $n \in N$, $h \in H$, $0 \leq \alpha \leq (p-1)$, то $n h x^{\alpha} H x^{-\alpha} h^{-1} n^{-1} = n H n^{-1} = \dot{H}$. Следовательно, элемент, переводящий подгруппу $\overline{H}$ в подгруппу H, можно выбрать из группы N. Поэтому в дальнейших рассуждениях, не теряя общности, полагаем, что $f \in N$. Но тогда $F = F^{f} = (N_1 \leftthreetimes \langle x^{f} \rangle) \cdot \mathcal{D}^{f}$, где $\mathcal{D}^{f} = H \langle n x^{\alpha} \rangle^{f}$ и $n \in N$, $n \neq 1$, $1 \leq \alpha \leq (p-1)$, $(n x^{\alpha})^p = 1$, либо $\mathcal{D}^{f} = H \langle n \rangle$, $n \in N$, $n \neq 1$.

В первом случае $(H \langle n (x^{\alpha})^{f} \rangle) \cap N = E$, а следовательно, $(H \langle n (x^{\alpha})^{f} \rangle) \cong (H \leftthreetimes \langle x \rangle)$, откуда $H \langle n (x^{\alpha})^{f} \rangle = H \leftthreetimes \langle n (x^{\alpha})^{f} \rangle$. Далее, очевидно, $(x^{\alpha})^{f} = n_0 x^{\beta}$, где $n_0 \in N$. Поэтому из равенства $n n_0 x^{\beta} H x^{-\beta} n_0^{-1} n^{-1} = H$ следует равенство

$$n n_0 H n_0^{-1} n = H .$$

Далее, пользуясь тем, что $D^1 \cap (N_1 \leftthreetimes \langle x^1 \rangle) = E$, получаем неравенство $n n_0 \neq 1$. Таким образом, $z = n n_0$ — нетривиальный элемент группы N такой, что

$$zHz^{-1} = H. \qquad /7/$$

Значит, для любого элемента $h \in H$ верно равенство

$$zhz^{-1} = h_1, \qquad /8/$$

где $h_1 \in H$. С другой стороны, имеем

$$h^{-1} z h = z_1, \qquad /9/$$

где $z_1 \in N$. Тогда из соотношений /8/ и /9/ получаем, что $h^{-1} z h z^{-1} = h^{-1} h_1 = z_1 z^{-1}$, откуда $h^{-1} h_1 = z_1 z^{-1} = 1$. Последнее равенство, очевидно, равносильно соотношению $h = h_1$. Следовательно, соотношение /8/ эквивалентно равенству $zhz^{-1} = h$. Таким образом, в рассматриваемом случае в группе N существует подгруппа $\langle z \rangle$ простого порядка, инвариантная относительно подгруппы H.

Во втором случае в группе $(H \langle n \rangle) \cap N = \langle n \rangle$. А поскольку $N \triangleleft F$, то $H\langle n \rangle = \langle n \rangle \leftthreetimes H$. Следовательно, и в этом случае в группе N существует подгруппа $\langle n \rangle$ простого порядка, инвариантная относительно группы H.

Лемма 4.2. доказана.

Л е м м а 4.3. Пусть $G = Q \leftthreetimes (P \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ — силовская p - подгруппа группы G, P и Q - соответственно элементарные абелевы p и q - подгруппы, и $x^p = 1$. Если $(Q \leftthreetimes P) - C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то $(Q \leftthreetimes P)$ - вполне факторизуемая группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы Машке группа Q разлагается в прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G. Поэтому не теряя общности рассуждений, полагаем, что Q - минимальный нормальный делитель группы G. Рассмотрим следующие случаи:

I. $C_Q(\langle x \rangle) = E$.

В этом случае ввиду теоремы Машке группа Q представима в виде прямого произведения $N_1 \times \langle c \rangle$ двух подгрупп N_1 и $\langle c \rangle$, первая из которых $\langle x \rangle$ - допустима, а вторая - циклическая подгруппа простого порядка из $C_N(\langle x \rangle)$.

Поскольку $(N \lambda P) - C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то

$$G = (N_1 \lambda <x>)(<n> \lambda \bar{P}), \quad /10/$$

где $(N_1 \lambda <x>) \cap (<n> \lambda \bar{P}) = E$, $Q = N_1 \times <n>$ и $\bar{P}$ - p - подгруппа. Далее, из того, что все силовские p - подгруппы группы G сопряжены между собой, следует существование элемента $g \in G$ такого, что $\bar{P}^g \subset (P \lambda <x>)$. Покажем, что элемент g можно выбрать в подгруппе Q. В самом деле, элемент g представим в виде произведения $f x^{\alpha} n_0$ трех элементов, первый из которых лежит в группе P, а третий в группе Q. Тогда из того, что $(f x^{\alpha}(n_0 \bar{P} n_0^{-1}) x^{-\alpha} f^{-1}) \subset$ $\subset (P \lambda <x>)$, непосредственно следует, что и $(n_0 \bar{P} n_0^{-1}) \subset$ $\subset (P \lambda <x>)$, поскольку элемент $f x^{\alpha}$ лежит в группе $(P \lambda <x>)$. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, в дальнейшем будем полагать, что элемент $g \in N$. Но из соотношения /10/ тогда следует равенство $G = (N_1 \lambda <x^g>) \cdot$ $\cdot (<n> \lambda \bar{P}^g)$. Теперь, если $x \in \bar{P}^g$, то, очевидно, подгруппа $<n>$ инвариантна во всей группе G. Отсюда, в силу неприводимости подгруппы Q в группе G, получаем, что $Q = <n>$, а значит лемма 4.3. доказана. Пусть тогда $x \notin \bar{P}^g$. В этом случае легко видеть, что $(P \lambda <x>) = (\bar{P}^g \lambda <x>)$, а следовательно, группа $G = Q \lambda (\bar{P}^g \lambda <x>)$. Рассмотрим теперь группу $F = <n, n^x, \ldots, n^{x^{p-1}}>$, порожденную элементами n, $n^x, \ldots, n^{x^{p-1}}$. Очевидно, $F \subseteq Q$ и $F \triangleleft G$. Тогда в силу неприводимости подгруппы Q в группе G получаем, что $F = Q$. Далее легко заметить, что для любого натурального числа ℓ, $\ell = 0, 1, \ldots, (p-1)$, пересечение $<n^{x^{\ell}}> \cap$ $\cap <n, n^x, \ldots, n^{x^{\ell-1}}>$ либо тривиально, либо совпадает с подгруппой $<n^{x^{\ell}}>$. Поэтому $Q = <n> \times <n^{x^{i_1}}> \times \ldots \times <n^{x^{i_s}}>$, где $1 \le i_1 < \ldots < s \le (p-1)$, причем поскольку подгруппа $<n>$ инвариантна относительно группы $\bar{P}^g$ и $(\bar{P}^g)^x = \bar{P}^g$, то и подгруппы $<n^{x^{i_\ell}}>$, $\ell = 1, 2, \ldots, s$, тоже инвариантны относительно группы $\bar{P}^g$. Значит, если $P = \bar{P}^g$, лемма 4.3. доказана.

Пусть тогда $\bar{P}^g \neq P$. В этом случае группа $\bar{P}^g$

содержит элемент $x^{\alpha}y$, где $\alpha = 1,2,\ldots,(p-1)$ и $y \in P$. Рассмотрим два подслучая:

а/ $\langle x^{\alpha}y\rangle \subset C_{\bar{P}}(Q)$.

Поскольку элемент $x^{\alpha}y$ не лежит в сепараторе $C(G)$ группы G, имеем равенство $G=(N_1\times\langle x^{\alpha}y\rangle)\cdot(\langle r_0\rangle\lambda\bar{P})$, где $Q = N_1\times\langle r_0\rangle$, $(N_1\times\langle x^{\alpha}y\rangle)\cap(\langle r_0\rangle\lambda\bar{P})=E$ и $\bar{P}$ — p - подгруппа. Но тогда, поскольку элемент $x^{\alpha}y$ перестановочен с элементом r_0, получаем, что подгруппа $\langle r_0\rangle$ простого порядка q инвариантна в группе G. В силу неприводимости подгруппы Q в группе G получаем, что $Q=\langle r_0\rangle$, а значит настоящее предложение в этом подслучае истинно.

б/ $\langle x^{\alpha}y\rangle \not\subset C_{\bar{P}}(Q)$.

Здесь непосредственно получаем, что число $p^2=|x^{\alpha}y|$ делит $(q-1)$. Тогда в силу предложений I.I. и I.2. получаем, что $(Q\lambda P)$ - вполне факторизуемая группа. Подслучай б/ рассмотрен, а вместе с этим закончено рассмотрение случая I.

2. $C_Q(\langle x\rangle)=E$.

В этом случае доказательство будем вести по порядку группы .

Пусть группа G является контрпримером минимального порядка к лемме 4.3.. В силу неприводимости подгруппы Q в группе G получаем, что для любого элемента $z \in P$ из центра p - группы $(P\lambda\langle x\rangle)$, наличие такого очевидно, имеем $C_Q(\langle z\rangle)=E$, либо $C_Q(\langle z\rangle)=Q$. Рассмотрим эти подслучаи по порядку.

В первом случае в силу строения дополнительного множителя группы Фробениуса группа $\langle z\rangle\times\langle x\rangle$ содержит элемент zx^{α}, $\alpha=1,2,\ldots,(p-1)$, такой, что $C_Q(\langle zx^{\alpha}\rangle)\neq \neq E$. Тогда группа $G=Q\lambda(P\lambda\langle zx^{\alpha}\rangle)$ и $C_Q(\langle zx^{\alpha}\rangle)\neq \neq E$. Но такая ситуация рассматривалась в предыдущем случае I. Поэтому $(Q\lambda P)$ - вполне факторизуемая группа, что противоречит предположению.

Во втором случае, в силу леммы I.4. и нашего предположения, фактор-группа $(Q\lambda P)/\langle z\rangle$ является вполне факторизуемой. А так как $Q\lambda P=(Q\lambda P_1)\times\langle z\rangle$, где $P=P_1\times\langle z\rangle$, то, очевидно, вся группа $Q\lambda P$ является вполне факторизуемой. Получили противоречие с предположением. Поскольку все возможности рассмотрены, случай 2 исчерпан.

Лемма 4.3. доказана.

Теперь из теорем I.2., 3.3., лемм 4.2.,4.3., и п. 2 § I настоящей работы непосредственно получаем необходимость следующего утверждения.

Следствие 4.I. Пусть G - произвольная бипримарная группа, имеющая либо нечетный порядок, либо элементарную абелеву 2-силовскую подгруппу. Группа G тогда и только тогда имеет хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу, когда она разложима в полупрямое произведение

$$B \leftthreetimes \langle x \rangle$$

двух подгрупп, первая из которых вполне факторизуема, а вторая является циклической подгруппой простого порядка.

Достаточность легко доказывается, если заметить, что $B - C$ - сепарирующая подгруппа группы $B \leftthreetimes \langle x \rangle$.

Лемма 4.4. Пусть конечная разрешимая группа $H = G \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $G - A$ - группа и $\langle x \rangle$ - циклическая подгруппа простого порядка p. Тогда в группе G существует такая силовская база $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, а в группе H такой элемент $\bar{x}$ простого порядка p, что выполняются следующие условия:

I. $P_i - \langle x \rangle$ - допустимые подгруппы, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2. $H = G \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle$.

Доказательство. Пусть

$$|G| = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}, \qquad /11/$$

где p_i - различные простые числа, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\pi_i(G) = \pi(G) \setminus \{p_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим следующие случаи:

I. $(|G|, |x|) = 1$.

Поскольку группа H разрешима, то существует такая ее силовская база

$$\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \langle \bar{x} \rangle\}, \qquad /12/$$

что $G = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$ и $H = G \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle$. Осталось показать, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, $P_i^{\bar{x}} = P_i$. Для этого рассмотрим произвольную бипримарную группу $F_i = P_i \langle \bar{x} \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $G \triangleleft H$ и $P_i = F_i \cap G$, то, очевидно, $F_i = P_i \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle$, что и требовалось показать. Таким образом, силовская база /12/ группы H удовлетворяет лемме 4.4..

Случай 1 рассмотрен.

2. $(|G|, |x|) \neq 1$.

В этом случае полагали, что $p_1 = p$. Если теперь $n=1$, то лемма 4.4. доказана. Поэтому предполагаем, что $n>1$. Вначале найдем π_1 - холловскую подгруппу G_1 группы H /она, очевидно, лежит в группе G / и элемент $\bar{x}$ простого порядка p такие, что $H = G \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle$ и $G_1^{\bar{x}} = G_1$.

В силу разрешимости группы H и леммы 1.1. из [6] имеем, что $H=(KU)\leftthreetimes\langle x\rangle$, где $(K\leftthreetimes\langle x\rangle)$ - силовская p - подгруппа группы H, $KU = K\cdot U_1\cdot U_2\cdot \ldots \cdot U_{n-1}$, U_i, $i = 1,2,\ldots,(n-1)$, есть силовские подгруппы группы H . Очевидно, $U-\pi_1$ - холловская подгруппа группы H . Ввиду предложения из [10 , с . 345], $N_H(U) \not\subseteq G$, откуда $N_H(U) = U \leftthreetimes T$, где $T-p$ - группа, не лежащая в группе G . Поскольку силовские p - подгруппы сопряжены в группе H , то существует элемент $g \in H$ такой, что $T^g \subset (K\leftthreetimes\langle x\rangle)$. При этом легко заметить, что подгруппа T^g не лежит в группе K . Тогда элемент из подгруппы T^g , не лежащий в группе K, представим в виде произведения $x^{\alpha}y$ двух элементов, первый из которых отличен от 1 , а второй лежит в группе K . Получаем

$$(U^g)^{x^{\alpha}y} = U^g, \qquad /13/$$

где $0<\alpha<p$ и $y \in K$.

Покажем теперь, что $U^g = U^a$, где $a \in (K\leftthreetimes\langle x\rangle)$. Очевидно, элемент g представим в виде произведения $x^{\delta}k h$, где $k \in K$ и $h \in U$. Тогда $U^g = (x^{\delta}k)hUh^{-1}(k^{-1}x^{-\delta}) = U^{x^{\delta}k}$, что и требовалось показать, поскольку элемент $x^{\delta}k$, очевидно, принадлежит группе $K\leftthreetimes\langle x\rangle$. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, полагаем, что соотношение /13/ эквивалентно соотношению

$$U^{x^{\alpha}y} = U, \qquad /14/$$

где $0<\alpha<p$ и $y \in K$.

Рассмотрим теперь произвольную бипримарную группу $F_i =$

$=KU_i$, $i=1,2,\dots,(n-1)$. В силу теоремы I.2. из [6] и п. 2 §I настоящей работы получаем, что $F_i=(P_{1i}\times U_{1i})\lambda(P_{2i}\times U_{2i})$, где $K=P_{1i}\times P_{2i}$ и $U_i=U_{1i}\times U_{2i}$, $i=1,2,\dots,(n-1)$. Поскольку $P_{1i}\times U_{1i}$ - абелева группа, то, очевидно, P_{1i} и U_{1i} являются инвариантными подгруппами группы F_i. Таким образом, произвольная силовская подгруппа U_i, $i=1,2,\dots,(n-1)$, представима в виде прямого произведения двух подгрупп, первая из которых инвариантна относительно группы K, а вторая лежит в $N_U(K)$. Поэтому группа $U=\langle N_U(K),R\rangle$, где R -подгруппа, инвариантная относительно группы K. Тогда из /I4/ легко получается

$$R^x\subset U. \qquad /I5/$$

То есть для любого элемента $f\in(K\lambda\langle x\rangle)$ имеем соотношение

$$R^f\subset U. \qquad /I6/$$

Осталось показать, что в группе $K\lambda\langle x\rangle$ найдется элемент $\bar{x}$ простого порядка p такой, что $\bar{x}\notin K$ и $(N_U(K))^{\bar{x}}\subset U$.

Вначале покажем, что $N_G(K)=K\lambda N_U(K)$. В самом деле, поскольку произвольный элемент n из $N_G(K)$, во-первых, представим в виде произведения uk, где u - элемент из группы U и k - элемент из группы K, а во-вторых, дает равенство $nKn^{-1}=K$, то $ukKk^{-1}u^{-1}=K^u=K$, откуда следует, что элемент лежит в $N_U(K)$. Значит, любой элемент из $N_G(K)$ представим в виде произведения ku, где $k\in K$ и $u\in N_U(K)$. А поскольку $K\triangleleft N_G(K)$ и K - силовская подгруппа группы $N_G(K)$, то, очевидно, $N_G(K)=K\lambda N_U(K)$, что, и требовалось показать.

Теперь покажем, что $(N_G(K))^x=N_G(K)$. В самом деле, для любого элемента n из $N_G(K)$ верно равенство $K=xnx^{-1}Kxn^{-1}x^{-1}$, поскольку $K^x=K$. Значит, $n^x\in N_G(K)$, что и требовалось показать.

Рассмотрим тогда группу $L=(K\lambda N)\lambda\langle x\rangle$, где $N=N_U(K)$. По теореме 2.3., ч. 5 из [8] группа $K=[K,N]\times C_K(N)$. Поэтому $L=(C_K(N)\times([K,N]\lambda N))\lambda\langle x\rangle$.

Покажем, что

$$[K,N]^x=[K,N]. \qquad /I7/$$

В самом деле, пусть $g\in[K,N]$. Тогда $g=$

$=knk^{-1}n^{-1}$, где $k\in K$, $n\in N$. Теперь $xgx^{-1}=$
$=x(knk^{-1}n^{-1})x^{-1}=k^x n^x k^{-x} n^{-x}$. Но элемент n^x представим в виде произведения $k_1 n_1$, где $k_1\in K$ и $n_1\in N$, а поэтому $g^x=k^x k_1(n_1 k^{-x} n_1^{-1})k_1^{-1}$ Поскольку элемент $n_1 k^{-x} n_1^{-1}$ лежит в группе K, а группа K абелева, то $g^x=k^x k_1 k_1^{-1} n_1 k^{-x} n_1^{-1}=k^x n_1 k^{-x} n_1^{-1}$. Значит, $g^x\in[K,N]$, что и требовалось показать.

Теперь, поскольку N - холловская подгруппа группы L и N лежит в нормальной подгруппе $(K\leftthreetimes N)$ группы L, то в силу сопряженности холловских подгрупп получаем равенство $xNx^{-1}=(ab)N(ab)^{-1}$, где $a\in[K,N]$ и $b\in C_K(N)$. Поэтому $N^x=N^a$, откуда

$$N=x^{-1}aNa^{-1}x. \qquad /18/$$

Осталось показать, что элемент $(x^{-1}a)$ имеет простой порядок p. Пусть это не так. Тогда $z=(x^{-1}a)^p\neq 1$. В силу теоремы 12.2.1. из [9], элемент z лежит в подгруппе Фраттини $\Phi(K\leftthreetimes\langle x\rangle)$ группы $K\leftthreetimes\langle x\rangle$. Но подгруппа $\Phi(K\leftthreetimes\langle x\rangle)$, очевидно, лежит в группе K, поскольку K - максимальная подгруппа p - группы $K\leftthreetimes\langle x\rangle$. Т.е. $z\in K$. Более того, так как $z=(x^{-1}a)^p$, а $a\in[K,N]$ и верно соотношение /17/, то элемент $z\in[K,N]$. Далее, из соотношения /18/ следует, что $zNz^{-1}=N$. Поэтому для любого элемента $n\in N$, $n\neq 1$, имеем соотношение

$$znz^{-1}=n_1, \qquad /19/$$

где $n_1\in N$.

С другой стороны, поскольку $[K,N]\triangleleft L$, получаем

$$n^{-1}zn=z_1, \qquad /20/$$

где $z_1\in[K,N]$.
Из соотношений /19/ и /20/ непосредственно получаем, что $n^{-1}znz^{-1}=n^{-1}n_1=z_1z^{-1}$, откуда $n^{-1}n_1=z_1z^{-1}=1$, а следовательно, $n=n_1$. Но тогда соотношение /19/ равносильно равенству $znz^{-1}=n$, откуда $z\in C_K(N)$, что в свою очередь противоречит тривиальности пересечения $C_K(N)\cap[K,N]$. Значит, $z=1$, а потому $(x^{-1}a)^p=1$. Теперь из последнего ра-

венства и соотношения /16/ получаем, что $U^{x^{-1}a} = U$.

Таким образом, $H = (KU) \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle$, где $\bar{x} = x^{-1}a$ и K, U — $\langle \bar{x} \rangle$ - допустимые подгруппы. Обозначим полученную нами π_1 - холловскую группу U через G_1.

Теперь, для вышенайденного элемента $\bar{x}$ построим $\langle \bar{x} \rangle$ - допустимые π_i - холловские подгруппы G_i для всех $i = 2, 3, \ldots, n$.

Для этого возьмем произвольную π_i - холловскую подгруппу H_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, группы H. В силу сопряженности холловских подгрупп и того, что $p = p_1 \in \pi_i(G)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, не теряя общности рассуждений, полагаем, что $\bar{x} \in H_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Но тогда, очевидно, $G \cap H_i = G_i$ - π_i - холловская подгруппа группы G и $G_i \trianglelefteq H_i$, поскольку $G \trianglelefteq H$. Значит, G_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, есть искомая $\langle \bar{x} \rangle$ - допустимая π_i - холловская подгруппа группы G.

Таким образом, мы построили π_i -холловские подгруппы $G_1, G_2, \ldots, G_n$ группы G такие, что $G_i^{\bar{x}} = G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $H = G \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle$. С помощью этих подгрупп построим силовскую базу группы G, удовлетворяющую лемме 4.4..

Для этого рассмотрим следующую последовательность групп: $T_i = \bigcap_{j = 1, 2, \ldots, (i-1), (i+1), \ldots, n} G_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Покажем, что $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ и есть искомая силовская база группы G. То, что T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, являются силовскими p_i - подгруппами группы G, факт очевидный. Далее, поскольку $G_i^{\bar{x}} = G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то и $T_i^{\bar{x}} = T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому осталось показать, что $T_i T_j = T_j T_i$, где $1 \leq i < j \leq n$. А для этого достаточно показать, что

$$T_i T_j = \langle T_i, T_j \rangle. \qquad /21/$$

Покажем это. Для начала заметим, что $|T_i T_j| = p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j}$ и $T_i T_j \leq \langle T_i, T_j \rangle$. Поэтому для доказательства соотношения /21/, очевидно, достаточно показать, что $|\langle T_i, T_j \rangle| \leq p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j}$. В самом деле, $\langle T_i, T_j \rangle = \langle (G_1 \cap \ldots \cap G_{i-1} \cap G_{i+1} \cap \ldots \cap G_n), (G_1 \cap \ldots \cap G_{j-1} \cap G_{j+1} \cap \ldots \cap G_n) \rangle = \langle (G_j \cap (G_1 \cap \ldots \cap G_{i-1} \cap G_{i+1} \cap \ldots \cap G_{j-1} \cap G_{j+1} \cap \ldots \cap G_n)),$

$(G_i \cap (G_1 \cap \ldots \cap G_{i-1} \cap G_{i+1} \cap \ldots \cap G_{j-1} \cap G_{j+1} \cap \ldots \cap G_n))$, а следовательно, подгруппа $\langle T_i, T_j \rangle$ лежит в бипримарной холловокой подгруппе $(G_1 \cap \ldots \cap G_{i-1} \cap G_{i+1} \cap \ldots \cap G_{j-1} \cap \cap G_{j+1} \cap \ldots \cap G_n)$ группы G. Но ее порядок равен, очевидно, $p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j}$. Значит, $|\langle T_i, T_j \rangle| \leq p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j}$, что и требовалось доказать.

Лемма 4.4. доказана полностью.

Лемма 4.5. Пусть $G = H \leftthreetimes (P \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где H - вполне факторизуемая группа, $(P \leftthreetimes \langle x \rangle)$ - силовская p - подгруппа группы G, причем P - элементарная абелева p - подгруппа и x - элемент простого порядка $p>2$. Если $(H \leftthreetimes P) - C$ - сепарирующая подгрупiа группы G, то она вполне факторизуема.

Доказательство. В силу теоремы I.2. из [6] группа $G = H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes (P \leftthreetimes \langle x \rangle))$, где H' - коммутант группы H, а $H = H' \leftthreetimes \mathcal{D}$. Поскольку H - вполне факторизуемая группа, то, очевидно, H' и $\mathcal{D}$ являются абелевыми вполне факторизуемыми группами, причем группа H' разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простого порядка, инвариантных относительно группы $\mathcal{D}$. Далее, так как H' - абелева группа, то, очевидно, любая ее силовская подгруппа инвариантна в группе G. Поэтому для доказательства леммы 4.5. достаточно рассмотреть случай, когда H' - примарная группа, скажем, порядка q^{ℓ}, q - простое число. Теперь, поскольку силовская q - подгруппа группы $\mathcal{D}$ лежит в $C_G(H')$, то можно предположить, не теряя общности, что $(|H'|, |\mathcal{D}|) = 1$. Поскольку теперь H' - силовская q - подгруппа группы G, то в силу теоремы Машке, для доказательства настоящего утверждения достаточно рассмотреть ситуацию, когда H' - минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим теперь, что группа G - контрпример минимального порядка к лемме 4.5.. Возможны следующие случаи:

I/ $\mathcal{D} = E$, или

2/ $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\times\mathfrak{D}_2$, где $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ являются нетривиальными $(P\lambda\langle x\rangle)$ - допустимыми подгруппами, или

3/ $\mathfrak{D}$ - нетривиальный минимальный нормальный делитель группы $\mathfrak{D}\lambda(P\lambda\langle x\rangle)$.

В первом случае в силу леммы 4.3 группа $(H'\lambda P)$ является вполне факторизуемой, что противоречит нашему предположению.

Во втором случае, поскольку группы $H'\lambda(\mathfrak{D}_1\lambda(P\lambda\langle x\rangle))$ и $H'\lambda(\mathfrak{D}_2\lambda(P\lambda\langle x\rangle))$ имеют порядок меньший, чем порядок группы G , получаем, что $H'\lambda(\mathfrak{D}_1\lambda P)$ и $H'\lambda\lambda(\mathfrak{D}_2\lambda P)$ являются вполне факторизуемыми группами. Но тогда, очевидно, $\mathfrak{D}_1=C_{\mathfrak{D}_1}(H')\times L_1$, где $L_1\lambda P=L_1\times P$ и $\mathfrak{D}_2=C_{\mathfrak{D}_2}(H')\times L_2$, где $L_2\lambda P=L_2\times P$. Следовательно, $H'\lambda\lambda(\mathfrak{D}\lambda P)=(H'\times C_{\mathfrak{D}_1}(H')\times C_{\mathfrak{D}_2}(H'))\lambda(L_1\times L_2\times P)$. А так как $\mathfrak{D}\lambda P$, в силу леммы 4.3., является вполне факторизуемой группой, то и вся группа $H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda P)$, очевидно, вполне факторизуема. Получили противоречие и в этом случае.

Рассмотрим теперь третий случай. Если группа $H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda P)$ имеет нетривиальный центр, то в силу леммы I.4. и нашего предположения фактор-группа $(H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda P))$ по своему центру будет вполне факторизуемой. Но тогда, очевидно, и вся группа $(H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda P))$ - вполне факторизуема. Получили противоречие. Значит, центр группы $H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda P)$ тривиален. Рассмотрим тогда следующие подслучаи: .

а/ Группа $P\lambda\langle x\rangle$ является неабелевой.

В этом случае, очевидно, порядок группы P больше простого числа p .

Если коммутант P' группы $(P\lambda\langle x\rangle)$ /он, очевидно, лежит в группе P / имеет индекс $|P:P'|>p$, то $P=P'\times U\times W$, где U и W - подгруппы, отличные от E . Тогда, поскольку группы $H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda((P'\times U)\lambda\langle x\rangle)$ и $H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda((P'\times W)\lambda\langle x\rangle)$ имеют порядки меньшие порядка группы G , то по предположению группы $H'\lambda\lambda(\mathfrak{D}\lambda(P'\times U))$ и $H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda(P'\times W))$ являются вполне факторизуемыми. С другой стороны, в силу неприводимости подгруппы $\mathfrak{D}$ в группе $K=\mathfrak{D}\lambda(P\lambda\langle x\rangle)$ $C_{\mathfrak{D}}(H')=E$ либо $C_{\mathfrak{D}}(H')=\mathfrak{D}$. Поэтому либо $\mathfrak{D}\lambda P=\mathfrak{D}\times P$, либо $H'\lambda\mathfrak{D}=H'\times\mathfrak{D}$. Но и в первом, и во-втором случаях, очевидно, группа $L = H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda P)$ является вполне факторизуемой. Получили противоречие.

Значит, коммутант P' группы $(P\lambda\langle x\rangle)$ имеет в группе P простой индекс. Но тогда, в силу предположения, группа $H'\lambda(\mathfrak{D}\lambda P')$ является вполне факторизуемой. С другой стороны, в силу неприводимости подгруппы $\mathfrak{D}$ в группе K получаем, что $C_{\mathfrak{D}}(H') = E$, либо $C_{\mathfrak{D}}(H') = \mathfrak{D}$. Во втором случае легко видеть, что группа L - вполне факторизуемая, а это противоречит нашему предположению. Поэтому $C_{\mathfrak{D}}(H') = E$. Но тогда

$$\mathfrak{D}\lambda P' = \mathfrak{D}\times P'. \qquad /22/$$

Если $H'\lambda P = H'\times P$, то, очевидно, группа H' разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простого порядка, инвариантных в группе L. Тогда в силу теоремы I.I. из [4] вся группа L является вполне факторизуемой. Получили противоречие. Значит, $H'\lambda P \neq H'\times P$. Следовательно, $p/(q-1)$ в силу вполне факторизуемости группы $H'\lambda P$. Но тогда ввиду предложения I.I. группа $H'\lambda\langle x\rangle$ является вполне факторизуемой. Поэтому в группе H' найдется подгруппа M такая, что $|H':M| = q$ и $M^x = M$. В силу дополняемости подгруппы $(M\lambda\langle x\rangle)$ в группе G получаем, что

$$G = (M\lambda\langle x^g\rangle)\cdot(\langle u\rangle\lambda(\mathfrak{D}\lambda\bar{P})), \qquad /23/$$

где $H' = M\times\langle u\rangle$, $g\in G$, $\bar{P} < (P\lambda\langle x\rangle)$ и $(M\lambda\langle x^g\rangle)\cap(\langle u\rangle\lambda(\mathfrak{D}\lambda\bar{P})) = E$. Тогда, очевидно, $P\lambda\langle x\rangle = \bar{P}\lambda\langle x\rangle$.

Если $\bar{P} = P$, то в силу неприводимости подгруппы H' в группе G получаем, что $H' = \langle u\rangle\times\langle u^x\rangle\times\ldots\times\langle u^{x^s}\rangle$. Легко видеть, что подгруппы $\langle u\rangle, \langle u^x\rangle, \ldots, \langle u^{x^s}\rangle$ инвариантны в группе L. Тогда, в силу теоремы I.I. из [4], группа L является вполне факторизуемой. Получили противоречие. Значит, $\bar{P} \neq P$. Но тогда, очевидно, $\bar{P} = P'\cdot\langle x^\alpha y\rangle$, где $P = P'\times\langle y\rangle$ и $0 < \alpha < p$. В силу теоремы I2. 2.I. из [9] элемент $x^\alpha y$ имеет порядок p^2 либо p. Рассмотрим эти случаи по порядку.

В первом случае, поскольку $(x^\alpha y)^p \in P$, то $y(x^\alpha y)y^{-1} = x^\alpha y$. С другой стороны, $(x^\alpha y)(x^\alpha y)^p(x^\alpha y)^{-1} = (x^\alpha y)^p$.

Поэтому $x(x^{\alpha}y)^{p}x^{-1}=(x^{\alpha}y)^{p}$. Т.е. $(x^{\alpha}y)^{p}\in$ $\in Z(P\lambda\langle x\rangle)$. А так как $\mathcal{D}\lambda P'=\mathcal{D}\times P'$ /см. /22//, то $C_{H'}(\langle(x^{\alpha}y)^{p}\rangle)=E$, либо $C_{H'}(\langle(x^{\alpha}y)^{p}\rangle)=H'$. Но поскольку группа L без центра, то $C_{H'}(\langle(x^{\alpha}y)^{p}\rangle)=E$. С другой стороны, поскольку $p>2$ и $x^{\alpha}y$ - элемент порядка p^{2}, в силу результатов гл. 4.3. [9], получаем, что $|P|>p^{2}$. Но тогда $P'=\langle x^{\alpha}y\rangle\times C_{P'}(\langle u\rangle)$ и $C_{P'}(\langle u\rangle)\neq E$. Так как $C_{P'}(\langle u\rangle)\triangleleft\overline{P}$ и элемент y действует тождественно на $C_{P'}(\langle u\rangle)$, то, очевидно, $(C_{P'}(\langle u\rangle))^{x}=$ $=C_{P'}(\langle u\rangle)$. Поэтому $C_{P'}(\langle u\rangle)\triangleleft(P\lambda\langle x\rangle)$, а следовательно, в $C_{P'}(\langle u\rangle)$ найдется элемент f из центра $Z(P\lambda\langle x\rangle)$, отличный от $(x^{\alpha}y)^{p}$. В силу неприводимости подгруппы H' в группе G получаем, что $C_{H'}(\langle f\rangle)=$ $=H'$, что противоречит тривиальности центра группы L. Поэтому элемент $x^{\alpha}y$ имеет простой порядок p.

В этом случае $\overline{P}=P'\lambda\langle x^{\alpha}y\rangle$. Теперь, поскольку H' - неприводимый множитель группы G и $\mathcal{D}\lambda P'=\mathcal{D}\times P'$, то $C_{H'}(\langle z\rangle)=E$, либо $C_{H'}(\langle z\rangle)=H'$, где z - - элемент центра p - группы $P\lambda\langle x\rangle$ из ее коммутанта P'. Но так как группа L без центра, то $C_{H'}(\langle z\rangle)=E$. Тогда, поскольку $C_{H'}(\langle z\rangle)=E$, то $P'=\langle z\rangle\times C_{P'}(\langle u\rangle)$ и $\langle z\rangle\times\langle x^{\alpha}y\rangle=\langle z\rangle\times C_{P'}(\langle u\rangle)$. Следовательно, $C_{\overline{P}}(\langle u\rangle)=$ $=C_{P'}(\langle u\rangle)\lambda\langle z^{\delta}x^{\alpha}y\rangle$.

С другой стороны, поскольку $C_{H'}(\mathcal{D})=E$, то $\mathcal{D}=C_{\mathcal{D}}(\langle u\rangle)\times\langle d_1\rangle$, где $\langle d_1\rangle$ - циклическая подгруппа простого порядка, действующая регулярно на подгруппе $\langle u\rangle$. Поэтому, очевидно,

$$C_{\mathcal{D}\lambda\overline{P}}(\langle u\rangle)=(C_{\mathcal{D}}(\langle u\rangle)\times C_{P'}(\langle u\rangle))\lambda\langle z^{\delta}x^{\alpha}y\rangle.$$

Так как $\mathcal{D}\lambda\langle z^{\delta}x^{\alpha}y\rangle$ - вполне факторизуемая группа, то $\mathcal{D}=$ $=C_{\mathcal{D}}(\langle u\rangle)\times\langle d_1\rangle$, $\langle d_1\rangle^{z^{\delta}x^{\alpha}y}=\langle d_1\rangle$. Т.е. подгруппа $\langle d_1\rangle$ инвариантна в группе $\mathcal{D}\lambda\overline{P}$. Поэтому $\langle d_1\rangle\lambda C_{\overline{P}}(\langle u\rangle)=$ $=\langle d_1\rangle\times C_{\overline{P}}(\langle u\rangle)$, так как $C_{\mathcal{D}\lambda\overline{P}}(\langle u\rangle)\triangleleft(\mathcal{D}\lambda\overline{P})$. Но тогда элементы d_1 и $z^{\delta}x^{\alpha}y$ перестановочны. В силу перестановочности элементов d_1 и z получаем перестановочность элементов d_1 и $x^{\alpha}y$. Поэтому $C_{\mathcal{D}}(\overline{P})\neq E$. В силу неприводимости подгруппы $\mathcal{D}$ в группе $\mathcal{D}\lambda(P\lambda\langle x\rangle)=$ $=K$ и того, что $\overline{P}^{x}=\overline{P}$, получаем равенство:

$$C_{\mathcal{D}}(\overline{P})=\mathcal{D}. \qquad /34/$$

Далее, поскольку $H' \leftthreetimes \langle x^{\alpha} y\rangle$ - вполне факторизуемая группа, то в группе H' найдется подгруппа M_1 такая, что $|H':M_1| = q$ и $M_1^x = M_1$. Так как подгруппа $M_1 \leftthreetimes \langle x^{\alpha} y\rangle$ дополняема в группе G, получаем, что

$$G = (M_1 \leftthreetimes \langle x^{\alpha} y\rangle^{g_1}) \cdot (\langle u_1\rangle \leftthreetimes (D \leftthreetimes \bar{\bar{P}})), \quad /25/$$

где $g_1 \in G$, $M_1 \times \langle u_1\rangle = H'$, $\bar{\bar{P}} < (P \leftthreetimes \langle x\rangle)$ и $(M_1 \leftthreetimes \langle x^{\alpha} y\rangle^{g_1}) \cap \cap (\langle u_1\rangle \leftthreetimes (D \leftthreetimes \bar{\bar{P}})) = E$. Рассуждениями, аналогичными проведенным при рассмотрении соотношения /23/, получаем, что

$$C_D(\bar{\bar{P}}) = D. \quad /26/$$

Теперь, в силу соотношений /24/ и /26/, и того очевидного факта, что $\langle \bar{P}, \bar{\bar{P}}\rangle = P \leftthreetimes \langle x\rangle$, получаем равенство: $C_D(P \leftthreetimes \langle x\rangle) = D$. Значит, $L = H' \leftthreetimes (D \times P)$ и, в силу предложения I.2., группа L является вполне факторизуемой. Получили противоречие. Случай а/ рассмотрен.

б/ Группа $P \leftthreetimes \langle x\rangle = P \times \langle x\rangle$.

Если порядок группы P больше простого числа p, то $P = \dot{U} \times W$, где $U \neq E$ и $W \neq E$. Тогда, поскольку порядки подгруппы $H' \leftthreetimes (D \leftthreetimes (U \times \langle x\rangle))$ и $H' \leftthreetimes (D \leftthreetimes (W \times \langle x\rangle))$ меньше порядка группы G, получаем, что $H \leftthreetimes (D \leftthreetimes U)$ и $H \leftthreetimes (D \leftthreetimes W)$ вполне факторизуемые группы. С другой стороны, в силу неприводимости подгруппы D в группе $K = D \leftthreetimes (P \times \langle x\rangle)$, $C_D(H') = E$, либо $C_D(H') = D$. Поэтому либо $D \leftthreetimes P = D \times P$, либо $H' \leftthreetimes D = H' \times D$. Но и в первом, и во-втором случаях, очевидно, группа L является вполне факторизуемой. Получили противоречие.

Значит, $|P| = p$. Пусть $P = \langle z\rangle$, где $z^p = 1$. Поскольку $H' \leftthreetimes \langle x\rangle$ является вполне факторизуемой, то в группе H' найдется подгруппа M такая, что $|H':M| = q$ и $M^x = M$. Но тогда

$$G = (M \leftthreetimes \langle x^{g}\rangle) \cdot (\langle u\rangle \leftthreetimes (D \leftthreetimes \langle s\rangle)), \quad /27/$$

где $g \in G$, $M \times \langle u\rangle = H'$ и $\langle x\rangle \times \langle s\rangle = \langle x\rangle \times \langle z\rangle$. В силу неприводимости подгруппы D в $D \leftthreetimes (\langle z\rangle \times \langle x\rangle)$ получаем, что $C_D(\langle s\rangle) = E$, либо $C_D(\langle s\rangle) = D$.

В первом случае, поскольку $\langle u\rangle \leftthreetimes (D \leftthreetimes \langle s\rangle)$ - - вполне факторизуемая группа /см. лемму 4.3. и теорему I.I. из [4]/, получаем, что $\langle u\rangle \leftthreetimes D = \langle u\rangle \times D$. Тогда в силу неприводимости подгруппы H' в группе G получаем, что $H' \lambda \mathcal{D} = H' \times \mathcal{D}$. А так как $H' \lambda \langle z \rangle$ и $\mathcal{D} \lambda \langle z \rangle$ являются вполне факторизуемыми группами, то и вся группа G вполне факторизуема. Получили противоречие.

Пусть тогда $C_{\mathcal{D}}(\langle s \rangle) = \mathcal{D}$. Если $\langle s \rangle = \langle z \rangle$, то в силу предложения I.2. вся группа G вполне факторизуема, что противоречит нашему допущению. Значит, $s = z x^{\alpha}$, где $0 < \alpha < p$. Но тогда, поскольку $H' \lambda \langle z x^{\alpha} \rangle$ - - вполне факторизуемая группа, в группе H' найдется подгруппа M_1 такая, что $|H' : M_1| = q$ и $M_1^{z x^{\alpha}} = M_1$. Поэтому

$$G = (M_1 \lambda \langle z x^{\alpha} \rangle^{g_1}) \cdot (\langle u_1 \rangle \lambda (\mathcal{D} \lambda \langle s_1 \rangle)), \qquad /28/$$

где $g_1 \in G$, $\langle z x^{\alpha} \rangle \times \langle s_1 \rangle = \langle z \rangle \times \langle x \rangle$ и $H' = M_1 \times \langle u_1 \rangle$. Рассуждениями, аналогичными проведенным при рассмотрении соотношения /27/, получаем, что $\mathcal{D} \lambda \langle s_1 \rangle = \mathcal{D} \times \langle s_1 \rangle$. Но поскольку $\langle z \rangle \times \langle x \rangle = \langle s_1 \rangle \times \langle s_2 \rangle$, то $\mathcal{D} \lambda (\langle z \rangle \times \langle x \rangle) = \mathcal{D} \times \langle z \rangle \times \langle x \rangle$. Тогда, очевидно, G - вполне факторизуемая группа. Получили противоречие. Случай б/ рассмотрен.

Лемма 4.5. доказана.

Л е м м а 4.6. Пусть конечная разрешимая группа $G = B \lambda \langle x \rangle$, где $x^2 = 1$, и силовская 2-подгруппа группы B является элементарной абелевой. Группа B тогда и только тогда является C - сепарирующей подгруппой группы G, когда она вполне факторизуема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. В силу леммы I.I. из [6] силовская 2-подгруппа группы G представима в виде полупрямого произведения силовской 2- подгруппы P группы B и циклической группы $\langle x \rangle$ порядка два. Ввиду леммы 4.4. тогда получаем, что $B = PH$, где $H^{\bar{x}} = H$, $P^{\bar{x}} = P$ - силовская 2-подгруппа группы B и $G = B \lambda \langle \bar{x} \rangle$.

I. Докажем в этом пункте, что H - вполне факторизуемая группа.

Пусть $F = H \lambda \langle \bar{x} \rangle$. Очевидно, $H - C$ - сепарирующая подгруппа группы F. Если $H^{(n)}$ - последняя, отличная от E, подгруппа в ряду коммутантов группы H, то в силу теоремы 3.3. и теоремы I.2. из [6], $F = H^{(n)} \lambda (\mathcal{D} \lambda \langle \bar{x} \rangle)$, где $H = H^{(n)} \lambda \mathcal{D}$. Так как $H^{(n)}$ – абелева группа, то любая ее силовская q - подгруппа Q инвариантна в G. Рассмотрим группу $F_1 = Q \lambda (\mathcal{D} \lambda \langle x \rangle)$, и покажем, что группа Q - разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $Q \lambda \mathcal{D}$ /то, что она абелева вполне факторизуемая, следует из теоремы 3.3./. Очевидно, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cdot Q_0$, где $Q_0 \times Q$ - силовская q - подгруппа группы F_1 и $\mathcal{D}_1^{\bar{x}} = \mathcal{D}_1$. Поэтому для доказательства нашего предположения достаточно рассмотреть группу $F_2 = Q \lambda (\mathcal{D}_1 \lambda \langle \bar{x} \rangle)$. Теперь Q - силовская q - подгруппа группы F_2. Тогда по теореме Машке группа Q представима в виде прямого произведения неприводимых в группе F_2 подгрупп. Поэтому, не теряя общности рассуждений, получаем, что Q - минимальный нормальный делитель группы F_2. Если $|Q| = q$, то все доказано. Если $|Q| > q$, то в силу того, что $\bar{x}^2 = 1$, в группе Q найдется подгруппа M такая, что $|Q:M| = q$ и $M^x = M$. Тогда в силу дополняемости подгруппы $M \lambda \langle \bar{x} \rangle$ в группе F_2 получаем

$$F_2 = (M \lambda \langle \bar{x} \rangle) \cdot (\langle u \rangle \lambda \mathcal{D}_1),$$

где $Q = M \times \langle u \rangle$. Следовательно, в силу неприводимости подгруппы Q в группе F_2, $Q = \langle u \rangle \times \langle u^{\bar{x}} \rangle$. А поскольку подгруппы $\langle u \rangle$ и $\langle u^{\bar{x}} \rangle$ инвариантны относительно группы $\mathcal{D}_1$, то Q разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $Q \times \mathcal{D}$. Но тогда и группа $H^{(n)}$ представима в виде прямого произведения циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе H.

Проводя те же рассуждения для группы $\mathcal{D} \times \langle \bar{x} \rangle$, мы получим, что $\mathcal{D} = R \lambda \mathcal{D}_1$, где группа R разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $\mathcal{D}$. Продолжая такой процесс, мы получим, что

$$H = R_1 \lambda (R_2 \lambda (R_3 \lambda (\ldots \lambda R_n) \ldots)),$$

где R_i - группа, представимая в виде прямого произведения циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $R_i \lambda (R_{i+1} \lambda (\ldots \lambda R_n)\ldots)$. Тогда, последовательно применяя теорему I.I. из [4], получаем, что H -вполне факторизуемая группа. Пункт I рассмотрен.

2. В этом пункте покажем, что $B = H \lambda P$.

Для этого в силу теоремы Бернсайда /теорема I4.3.I. из [9]/ достаточно показать, что группа P лежит в центре своего нормализатора $N_B(P)$ группы B . Покажем это.

Поскольку $P^{\bar{x}} = P$, то, очевидно, $(N_B(P))^{\bar{x}} = N_B(P)$. Рассмотрим группу $L = N_B(P) \lambda \langle \bar{x} \rangle = (P \lambda N) \lambda \langle \bar{x} \rangle$, где $N = N_H(P)$. Так как $H^{\bar{x}} = H$, то, очевидно, $N^{\bar{x}} = N$. Тогда $L = P \lambda (N \lambda \langle \bar{x} \rangle)$. Теперь, в силу леммы 4.2., P разлагается в прямое произведение циклических подгрупп порядка два, инвариантных относительно группы N . Значит, $P \lambda N = P \times N$, что и требовалось показать.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству настоящего предложения.

В силу теоремы I.2 из [6] группа $G = H' \lambda (\mathcal{D} \lambda (P \lambda \langle x \rangle))$, где H' - коммутант группы H , а $H = H' \lambda \mathcal{D}$. Поскольку H - вполне факторизуемая группа, то H' и $\mathcal{D}$, очевидно, являются абелевыми вполне факторизуемыми группами. Тогда любая силовская подгруппа группы H' инвариантна в группе G , а потому для доказательства леммы 4.6., очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда H' - примарная группа, скажем порядка q^{ℓ} , ℓ - простое число. Далее, поскольку силовская q - подгруппа группы $\mathcal{D}$ лежит в $C_{\mathcal{D}}(H')$, то можно предположить, не теряя общности рассуждений, что $(|H'|, |\mathcal{D}|) = 1$. Ну, а поскольку теперь H' -силовская q - подгруппа группы G , то в силу теоремы Машке для доказательства настоящего утверждения достаточно рассмотреть ситуацию, когда H' - минимальный нормальный делитель группы G . Предположим теперь, что группа G - контрпример к лемме 4.6. минимального порядка. Возможны следующие случаи:

1/ $\mathcal{D} = E$, или

2/ $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ являются нетривиальными $(P \lambda \langle x \rangle)$ - допустимыми подгруппами, или

3/ $\mathcal{D}$ - нетривиальный минимальный нормальный делитель группы $K = (\mathcal{D} \leftthreetimes (P \leftthreetimes \langle x \rangle))$.

В первом случае, в силу леммы 4.3., группа $H' \leftthreetimes P$ является вполне факторизуемой, что противоречит нашему предположению.

Во втором случае, поскольку группы $H' \leftthreetimes (\mathcal{D}_1 \leftthreetimes (P \leftthreetimes \langle x \rangle))$ и $H' \leftthreetimes (\mathcal{D}_2 \leftthreetimes (P \leftthreetimes \langle x \rangle))$ имеют порядок меньший, чем порядок группы G, получаем, что $H' \leftthreetimes (\mathcal{D}_1 \leftthreetimes P)$ и $H' \leftthreetimes (\mathcal{D}_2 \leftthreetimes P)$ являются вполне факторизуемыми группами. Но тогда, очевидно, $\mathcal{D}_1 = C_{\mathcal{D}_1}(H') \times L_1$, где $L_1 \leftthreetimes P = L_1 \times P$ и $\mathcal{D}_2 = C_{\mathcal{D}_2}(H') \times L_2$, где $L_2 \leftthreetimes P = L_2 \times P$. Следовательно, $H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes P) = (H' \times C_{\mathcal{D}_1}(H') \times C_{\mathcal{D}_2}(H')) \leftthreetimes (L_1 \times L_2 \times P)$. А так как $\mathcal{D} \leftthreetimes P$, в силу леммы 4.3., является вполне факторизуемой группой, то и вся группа $H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes P)$ вполне факторизуема. Получили противоречие и в этом случае.

Рассмотрим третий случай. Если группа $H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes P)$ имеет нетривиальный центр, то в силу леммы I.4. и нашего предположения фактор-группа $(H \leftthreetimes P)/Z(H \leftthreetimes P)$ вполне факторизуема. Но тогда, очевидно, и вся группа $H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes P)$ вполне факторизуема. Получили противоречие. Таким образом, $Z(H \leftthreetimes P) = E$. Рассмотрим тогда следующие подслучаи.

а/ Группа $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ - неабелева.

В этом случае, очевидно, порядок группы P больше числа 2. Покажем, что $|P| = 4$. Пусть $|P| = 4$. Тогда в группе P легко найти две нетривиальные подгруппы U и W такие, что $P = \langle U, W \rangle$, $U^x = U$, $W^x = W$. Тогда, поскольку группы $H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes (U \leftthreetimes \langle x \rangle))$ и $H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes (W \leftthreetimes \langle x \rangle))$ имеют порядки меньшие порядка группы G, то по предположению они являются вполне факторизуемыми. С другой стороны, в силу неприводимости подгруппы $\mathcal{D}$ в группе $K = \mathcal{D} \leftthreetimes (P \leftthreetimes \langle x \rangle)$ $C_{\mathcal{D}}(H') = E$, либо $C_{\mathcal{D}}(H') = \mathcal{D}$. Поэтому либо $\mathcal{D} \leftthreetimes P = \mathcal{D} \times P$, либо $H' \leftthreetimes \mathcal{D} = H' \times \mathcal{D}$. Но и в первом и во втором случаях, очевидно, группа $B = H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes P)$ является вполне факторизуемой. Получили противоречие. Значит, $|P| = 4$.

Тогда, в силу результатов из [?] получаем, что $P = \langle z \rangle \times \langle y \rangle$, где $z^x = z$ и $y^x = zy$.

Тогда в силу нашего предположения группа $H' \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes \langle z \rangle)$ является вполне факторизуемой. С другой стороны, в силу неприводимости подгруппы $\mathcal{D}$ в группе K, получаем, что $C_{\mathcal{D}}(H') = E$, либо $C_{\mathcal{D}}(H') = \mathcal{D}$. Во-втором случае легко видеть, что группа $L = (H' \times \mathcal{D}) \leftthreetimes P$ является вполне факторизуемой, а это противоречит нашему предположению. Поэтому $C_{\mathcal{D}}(H') = E$. Но тогда, очевидно,

$$\mathcal{D} \leftthreetimes \langle z \rangle = \mathcal{D} \times \langle z \rangle. \qquad /29/$$

Поскольку $H' \leftthreetimes (\langle z \rangle \times \langle x \rangle)$ - вполне факторизуемая группа, то в группе H' найдется подгруппа M такая, что $|H' : M| = q$, $M^z = M$ и $M^x = M$. Так как группа $M \leftthreetimes \langle x \rangle$ дополняема в группе G, получаем следующие разложения

$$G = (M \leftthreetimes (\langle z \rangle \times \langle x \rangle)^g)(\langle u \rangle \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes \langle z^{\alpha} y \rangle)), /30/$$

где $H' = M \times \langle u \rangle$, $g \in G$ и $(M \leftthreetimes (\langle z \rangle \times \langle x \rangle)^g) \cap$ $\cap (\langle u \rangle \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes \langle z^{\alpha} y \rangle)) = E$. С одной стороны, в силу теоремы I.I. из [4], группа $\langle u \rangle \leftthreetimes (\mathcal{D} \leftthreetimes \langle z^{\alpha} y \rangle)$ является вполне факторизуемой. С другой стороны, в силу неприводимости подгруппы H' в группе H, $C_{H'}(\mathcal{D}) = E$, либо $C_{H'}(\mathcal{D}) = H'$. Во втором случае, очевидно, группа $B = (H' \times \mathcal{D}) \leftthreetimes P$ является вполне факторизуемой, что противоречит нашему предположению. В случае $C_{H'}(\mathcal{D}) = E$, очевидно, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_2 \neq E$ и $\langle u \rangle \leftthreetimes \mathcal{D}_1 = \langle u \rangle \times \mathcal{D}_1$, а $\mathcal{D}_2 \leftthreetimes \langle z^{\alpha} y \rangle =$ $= \mathcal{D}_2 \times \langle z^{\alpha} y \rangle$. Но теперь, уже в силу неприводимости подгруппы $\mathcal{D}$ в группе K, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$. Т.е. $\mathcal{D} \leftthreetimes \langle z^{\alpha} y \rangle =$ $= \mathcal{D} \times \langle z^{\alpha} y \rangle$, откуда $\mathcal{D} \leftthreetimes \langle y \rangle = \mathcal{D} \times \langle y \rangle$, так как $\mathcal{D} \leftthreetimes \langle z \rangle =$ $= \mathcal{D} \times \langle z \rangle$ /см. соотношение /29//. Значит, $B = H' \leftthreetimes$ $\leftthreetimes (\mathcal{D} \times P)$ и, в силу приложения I.2., B - вполне факторизуемая группа. Получили противоречие. Случай а/ рассмотрен.

б/ Группа $P \leftthreetimes \langle x \rangle = P \times \langle x \rangle$.

Рассуждениями, аналогичными проведенным при рассмотрении п. б/ доказательства леммы 4.5., получим противоречие.

Лемма 4.6. доказана, поскольку достаточность очевидна.

Примечание 3. Мимоходом, при доказательстве леммы 4.6., мы получили истинность леммы 4.5, и в случае $p = 2$ /см. формулировку леммы 4.5./.

Так же мы получили, что если группа $G = H \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $x^2 = 1$ и H - группа нечетного порядка, являющаяся C - сепарирующей подгруппой группы G, то H -вполне факторизуемая группа.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 4.2. Пусть $G = H \leftthreetimes (P \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где H - вполне факторизуемая группа, $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ - силовская p - подгруппа группы G, причем P - элементарная абелева p - подгруппа и x - элемент простого порядка p. Если $(H \leftthreetimes P)$- C- сепарирующая подгруппа группы G, то она вполне факторизуемая.

Лемма 4.7. Пусть конечная разрешимая группа $G = A \leftthreetimes (P \leftthreetimes (T \leftthreetimes \langle x \rangle))$, где $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ - силовская p - подгруппа группы G, P - элементарная абелева p - подгруппа, $x^p = 1$ и A - абелева группа. Если группа $B = A \leftthreetimes (P \leftthreetimes T)$- C - сепарирующая подгруппа группы G, то $B = (A \times [P,T]) \leftthreetimes (C_P(T) \times T)$.

Доказательство. Из теоремы 2.3, часть5 [8] группа $P = C_P(T) \times [P,T]$. Поэтому для доказательства леммы 4.7., очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $C_P(T) = E$. В силу теремы 3.3 все силовские подгруппы группы B являются элементарными абелевыми. Следовательно, A - абелева вполне факторизуемая группа. Так как все силовские подгруппы группы A инвариантны во всей группе G, то для доказательства настоящей леммы достаточно предположить примарность группы A. Т.е. $|A| = q^l$, q - простое число. Пусть теперь Q_T - силовская q - подгруппа группы T. В силу теоремы 3.3 $A \times Q_T$ - силовская q - подгруппа группы B. А в силу следствия 4.I бипримарная группа $(A \times Q_T) \cdot P$ является вполне факторизуемой. Поэтому $(A \times Q_T) \cdot P = (A \times Q_T) \leftthreetimes P$, либо $(A \times Q_T) \cdot P = P \leftthreetimes (A \times Q_T)$. В первом случае $Q_T \leftthreetimes P = Q_T \times P$, а во-втором - $A \leftthreetimes P = A \times P$. Очевидно, во-втором случае лемма 4.7. доказана. Поэтому рассмотрим первый случай.

В этом случае $Q_T \subset C_T(A \lambda P)$. Следовательно, не ограничивая общности рассуждений, предполагаем, что $Q_T = E$. Таким образом, A - силовская q - подгруппа группы G. И наконец, в силу теоремы Машке, для доказательства леммы 4.7 достаточно рассмотреть случай, когда A - минимальная нормальная подгруппа группы G.

Естественно, что мы рассматриваем случай, когда $A \lambda P \neq A \times P$. Тогда, поскольку группа $(A \lambda P)$ - вполне факторизуема, то $p/(q-1)$. Тогда, в силу предложения I.I группа $A \lambda \langle x \rangle$ также является вполне факторизуемой. Поэтому в группе A найдётся подгруппа M такая, что $|A:M| = q$ и $M^x = M$. Ввиду дополняемости подгруппы $(M \lambda \langle x \rangle)$ в группе G получаем следующее разложение:

$$G = (M \lambda \langle x^{3} \rangle) \cdot (\langle u \rangle \lambda (\bar{P} \cdot T)),$$

где $\bar{P} \subset (P \lambda \langle x \rangle)$. Рассмотрим следующие случаи.

I. $\bar{P} \not\subset (P \lambda T)$, т.е. $\bar{P} \neq P$.

В этом случае, очевидно, $\bar{P}T = ((P \cap T) \cap (\bar{P}T)) \cdot \langle x^{\alpha} z \rangle$, где $0 < \alpha < p$, $P = (P \cap \bar{P}) \times \langle z \rangle$. Но подгруппа $((P \cap T) \cap (\bar{P}T))$ инвариантна в группе $\bar{P}T$, поскольку группа $P \lambda T$ инвариантна во всей группе $(P \lambda T) \lambda \langle x \rangle$. Теперь, в силу предложения из [IO, с. 345] $N_{\bar{P}T}(T) \not\subset ((P \lambda T) \cap (\bar{P}T))$. Следовательно, существует элемент $(x^{\alpha} z_1) \in N_{\bar{P}T}(T)$, где $z_1 \neq 1$ и $z_1 \in P$. Тогда $T^{z_1} = T$, поскольку $T^x = T$. Значит для любого элемента $t \in T$ имеем

$$z_1 t z_1^{-1} = t_1, \qquad /3I/$$

где $t_1 \in T$. С другой стороны, поскольку $P \triangleleft (P \lambda T)$, имеем

$$t z_1^{-1} t^{-1} = z_2, \qquad /32/$$

где $z_2 \in P$. Из /3I/ и /32/ легко получаем, что $z_1 t z_1^{-1} t^{-1} = t_1 t^{-1} = z_1 z_2$, откуда $t_1 t^{-1} = z_1 z_2 = 1$, а следовательно, $t_1 = t$. Тогда соотношение /3I/ равносильно равенству $z_1 t z_1^{-1} = t_1$, что приводит к $C_P(T) \neq E$. А это противоречит нашему предположению. Случай I исчерпан.

2. $\bar{P} \subset (P \lambda T)$, т.е. $\bar{P} = P$.

В этом случае, в силу неприводимости подгруппы A в группе G, получаем, что $A = \langle a \rangle \times \langle a^{x} \rangle \times \ldots \times \langle a^{x^s} \rangle$, причем легко убедиться в инвариантности подгрупп $\langle a^{x^i} \rangle$, $i = 0, 1, \ldots, s$, в группе $A \lambda (P \lambda T)$. Значит, группа A разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе B. Далее, в силу теоремы Машке, $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$, где P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, - неприводимые множители группы $P \lambda T$. Ввиду теоремы I.I из [4], для любого элемента $t \in T$, имеющего простой порядок, группа $A \lambda (P_i \lambda \langle t \rangle)$ является вполне факторизуемой, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, либо $A \lambda P_i = A \times P_i$, либо $P_i \lambda \langle t \rangle = P_i \times \langle t \rangle$, в силу неприводимости подгруппы P_i в группе $P \lambda T$. Второй случай для всех $t \in \Omega_1(T)$ не проходит, поскольку $C_P(T) = E$ и $\langle \Omega_1(T) \rangle = T$. Значит, $A \lambda P_i = A \times P_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, откуда $A \lambda P = A \times P$. Случай 2 рассмотрен.

Лемма 4.7. доказана.

§ 5 Строение конечных разрешимых групп, имеющих дополняемые в них C - сепарирующие подгруппы

Этим параграфом завершается описание конечных разрешимых групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую подгруппу.

Т е о р е м а 5.I. Пусть конечная группа $G = M \lambda \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ - силовская подгруппа группы G простого порядка p. Группа M тогда и только тогда является C - сепарирующей подгруппой группы G, когда она представима в виде полупрямого произведения

$$M = (C_1 \times F_1) \lambda ((C_2 \times F_2) \lambda (\ldots \lambda (C_n \times F_n) \ldots)$$

n - подгрупп $C_i \times F_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1/ $(C_i \times F_i)$ - абелева вполне факторизуемая группа, для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

2/ C_i разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $K_i = (C_i \times F_i) \lambda ((C_{i+1} \times F_{i+1}) \lambda (\ldots \lambda (C_n \times F_n)\ldots))$, причем C_i и F_i - нормальные подгруппы группы K_i , для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

3/ $C = (C_1 \lambda (C_2 \lambda (\ldots \lambda C_n)\ldots))$ - вполне факторизуемая группа, а $F = (F_1 \lambda (F_2 \lambda (\ldots \lambda F_n)\ldots))$ - абелева вполне факторизуемая группа, причем $F \lambda \langle x \rangle$ - - группа Фробениуса с инвариантным множителем F ;

4/ для любой $\langle x \rangle$ - допустимой подгруппы из группы F_i в ней найдется дополнение, инвариантное в группе K_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

5/ все силовские подгруппы группы M являются элементарными абелевыми.

Доказательство. Необходимость. Вначале докажем п. 5 настоящей теоремы.

Для произвольной силовской Q подгруппы группы M в силу теоремы 4.2.4. [9] получаем, что $N_G(Q) \nleq M$. Значит, существует элемент g из группы M такой, что $x^g \in N_G(Q)$. Рассмотрим группу $L = Q \lambda \langle x^g \rangle$. Так как группа $\Phi(Q) \lambda \langle x^g \rangle$ дополняема во всей группе G , то она дополняема и в группе L . Следовательно, $L = (\Phi(Q) \lambda \langle x^g \rangle) \cdot Q_1$, где $(\Phi(Q) \lambda \langle x^g \rangle) \cap Q_1 = E$. Поскольку $(|Q|, |x^g|) = 1$, то $Q = \Phi(Q) \lambda Q_1$, откуда $\Phi(Q) = E$, а значит, Q - элементарная абелева группа. Пункт 5 предлагаемой теоремы доказан.

Пусть теперь $G^{(n)}$ - последняя отличная от E группа в ряду коммутантов группы M . Ввиду доказанного нами п. 5 теоремы 5.I. и в силу теоремы I.2 [6] $G = G^{(n)} \lambda S$, откуда $G = G^{(n)} \lambda ((M \cap S) \lambda \langle x^g \rangle)$, $g \in M$. Но тогда $G = G^{(n)} \lambda (D \lambda \langle x \rangle)$, где $G^{(n)} \lambda D = M$.

Примечание I. Мимоходом отметим, что поскольку $G^{(n)}$ - абелева группа и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы, то $G^{(n)}$ - абелева вполне факторизуемая группа.

Легко видеть, что произвольная силовская подгруппа U

группы $G^{(n)}$ инвариантна во всей группе G. Рассмотрим тогда группу $G_0 = U \leftthreetimes (D \leftthreetimes \langle x \rangle)$. Теперь, поскольку все силовские подгруппы группы G_0 являются элементарными абелевыми, то силовская q - подгруппа группы G_0, содержащая группу U, представима в виде прямого произведения

$$U \times U_D, \qquad /33/$$

где U_D - силовская q - подгруппа группы D. Тогда $D = H U_D$. Поскольку H - холловская подгруппа группы $N = D \leftthreetimes \langle x \rangle$, то в силу предложения из [10, с. 345], в группе D найдется элемент g такой, что $x^g \in N_N(H)$. Рассмотрим тогда группу $G_1 = U \leftthreetimes (H \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle)$, где $x^g = \bar{x}$. Так как U - силовская q - подгруппа группы G_1, то в силу теоремы Машке $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_l$, где U_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, - минимальные нормальные делители группы G_1. Возможны два случая:

1/ $C_{U_i}(\langle x \rangle) \neq E$ или

2/ $C_{U_i}(\langle x \rangle) = E$ для всех $i = 1, 2, \ldots, l$.

Рассмотрим первый случай. Обозначим группу $U_i \leftthreetimes (H^{g^{-1}} \leftthreetimes \langle x \rangle)$ через G_i, $i = 1, 2, \ldots, l$. Поскольку $C_{U_i}(\langle x \rangle) \neq E$, то в группе U_i найдется подгруппа W такая, что $W^x = W$ и $|U_i : W| = q$. Так как подгруппа $(W \leftthreetimes \langle x \rangle)$ дополняема во всей группе G, то, очевидно, $G_i = (W \leftthreetimes \langle x \rangle)(\langle m \rangle \leftthreetimes H^{g^{-1}})$, причем $U_i = W \times \langle m \rangle$ и $g_1 \in U_i$, откуда $G_i = (W \leftthreetimes \langle x^{g_1} \rangle) \cdot (\langle m \rangle \leftthreetimes H^{g^{-1}})$. Т.е. в группе U_i найдется подгруппа $\langle m \rangle$ простого порядка q, инвариантная относительно группы $H^{g^{-1}}$. Но тогда по теореме Клиффорда 44.3.1 из [11] группа U_i разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных относительно группы $H^{g^{-1}}$. Теперь, учитывая соотношение /33/, группа U_i раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе M. Таким образом, в группе $G^{(n)}$ есть только два вида минимальных нормальных делителей группы G, первый из которых разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе M, а второй не содержит элементов отличных от тривиального и перестановочных с элементом x.

Следовательно, $G^{(n)} = C_1 \times F_1$, где C_1 - группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе M и $C_1^x = C_1$, а $C_{F_1}(\langle x \rangle) = E$ и $F_1 \triangleleft G$.

Продолжая последовательно те же рассуждения уже для группы $\mathcal{D} \lambda \langle x \rangle$, мы в конечном итоге получим, что

$$M = (C_1 \times F_1) \lambda ((C_2 \times F_2) \lambda (\dots \lambda (C_n \times F_n) \dots)), \quad /34/$$

где подгруппы C_i и F_i, очевидно, удовлетворяют пунктам I и 2 рассматриваемой теоремы I для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим теперь группу $C = C_1 \lambda (C_2 \lambda (\dots \lambda C_n) \dots)$. Последовательно применяя теорему I.I. из [1], мы получаем, что C - вполне факторизуемая группа.

Теперь рассмотрим группу $F = F_1 \lambda (F_2 \lambda (\dots \lambda F_n) \dots)$. Индукцией по числу множителей F_i, $i = 1, 2, \dots, n$ покажем, что $C_F(\langle x \rangle) = E$.

Если $n = 1$, то, очевидно, $C_F(\langle x \rangle) = E$. Пусть тогда централизатор $\langle x \rangle$ в группе $T = (F_1 \lambda (\dots \lambda F_k) \dots)$ равен E, где $k = 1, 2, \dots, (n-1)$. Покажем, что централизатор подгруппы $\langle x \rangle$ в группе $T \lambda F_{k+1}$ равен тоже E. Пусть это не так. Тогда, так как

$$C_T(\langle x \rangle) = E \quad /35/$$

и $C_{F_{k+1}}(\langle x \rangle) = E$, то, очевидно, найдется элемент tf такой, что $t \in T$ и $t \neq 1$, $f \in F_{k+1}$ и $f \neq 1$, $x t f x^{-1} = tf$. Тогда $t^{-1} t^x = f f^{-x}$, откуда $t^{-1} t^x = f f^{-x} = 1$, а следовательно, $t^x = t$, что противоречит соотношению /35/. Значит, $C_{(T \lambda F_{k+1})}(\langle x \rangle) = E$. Таким образом, $C_F(\langle x \rangle) = E$. Следовательно, $F \lambda \langle x \rangle$ - группа Фробениуса с инвариантным множителем F. Поэтому F - нильпотентная группа. А так как все ее силовские подгруппы являются элементарными абелевыми, то F - абелева вполне факторизуемая группа. Таким образом, мы закончили доказательство пункта 3 настоящей теоремы.

Осталось доказать п. 4 теоремы 5.I.. Очевидно, достаточно доказать этот пункт для группы F_1.

Так как все силовские подгруппы группы F_1 инварианпы в группе G, то достаточно рассмотреть группу $G_0 = U \leftthreetimes \leftthreetimes (D \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где U - силовская q - подгруппа группы F_1. Поскольку все силовские подгруппы группы G_0 являются элементарными абелевыми, то силовская q - подгруппа группы G_0 представима в виде прямого произведения

$$U \times U_0, \qquad /36/$$

где U_0 - силовская q - подгруппа группы D. Тогда $D = H U_0$. Так как H - холловская подгруппа группы $N = D \leftthreetimes \langle x \rangle$, то в силу предложения из [10 , с .345] в группе D найдется элемент g такой, что $x^g \in N_N(H)$. Рассмотрим группу $G_1 = U \leftthreetimes (H \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle)$, где $\bar{x} = x^g$. Для произвольной $\langle x \rangle$ - допустимой подгруппы L из группы U группа $L \leftthreetimes \langle x \rangle$ дополняема во всей группе G. Следовательно, $G_1 = (L \leftthreetimes \langle \bar{x}^z \rangle)(R \leftthreetimes H)$, где $L \times R = U$, $z \in U$. Но тогда группа R, в силу соотношения /36/, инвариантна в группе M. Пункт 4 настоящей теоремы доказан. Вместе с этим закончено доказательство необходимости теоремы 5.I..

Достаточность. Вначале покажем, что для любой $\langle x \rangle$ - допустимой подгруппы из группы M в группе M найдется к ней дополнение.

Пусть T - произвольная $\langle x \rangle$ - допустимая подгруппа из группы M.

I. Если $T \subset (C_1 \times F_1)$, то, очевидно, в группе $C_1 \times F_1$ найдется дополнение к подгруппе T, инвариантное в группе M, откуда непосредственно следует дополняемость подгруппы T во всей группе M.

2. Пусть теперь для всех s, $s = 1, 2, \ldots, (n-1)$ группа T, лежащая в группе $B_s = (C_1 \times F_1) \leftthreetimes ((C_2 \times F_2) \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (C_n \times F_n) \ldots)$, имеет в ней дополнение, инвариантное относительно группы K_{s+1}. Покажем, исходя из этого предположения, что если группа $T \subset B_{s+1}$, то в группе B_{s+1} найдется дополнение к T, инвариантное относительно группы K_{s+2}.

3. В самом деле, по предположению $B_s = (T \cap B_s) D_s$, где $(T \cap B_s) \cap D_s = E$ и D_s - подгруппа инвариантная относительно группы K_{s+1}. Так как $(T \leftthreetimes \langle x \rangle)$ - A - груп-

па, то по теореме I.2. из [6] $T\lambda\langle x\rangle=(T\cap B_s)\lambda(\mathcal{D}_T\lambda\langle x\rangle)$, где $\mathcal{D}_T$, очевидно, абелева группа и $\mathcal{D}_T\subset B_{s+1}$. Тогда $\mathcal{D}_T=\langle b_1t_1\rangle\times\ldots\times\langle b_2t_2\rangle$, где $b_i\in B_s$ и $t_i\in\in(C_{s+1}\times F_{s+1})$, $i=1,2,\ldots,2$. Поскольку $B_s^x=B_s$ и $(C_{s+1}\times F_{s+1})^x=(C_{s+1}\times F_{s+1})$, то, очевидно, подгруппа $P\times\langle t_1\rangle\times\ldots\times\langle t_2\rangle$ - $\langle x\rangle$ - допустима. Легко заметить, что к группе P найдется дополнение J в группе $C_{s+1}\times F_{s+1}$, инвариантное относительно подгруппы K_{s+2}. Тогда, во- первых, $B_{s+1}=T(\mathcal{D}_s\lambda J)$, где $T\cap(\mathcal{D}_s\lambda J)=E$ и, во- вторых, группа $\mathcal{D}_s\lambda J$ инвариантна относительно группы K_{s+2}. Следовательно, $M=T((\mathcal{D}_s\lambda J)\lambda K_{s+2})$ и $T\cap((\mathcal{D}_s\lambda J)\lambda K_{s+2})=E$. Таким образом, простой индукцией мы показали, что группа T всегда дополняема в группе M.

Пусть теперь Z - произвольная подгруппа группы G, не лежащая в группе M. Тогда $Z=(Z\cap M)\lambda\langle x^g\rangle$, где $g\in M$, откуда $Z^{g^{-1}}=(Z\cap M)^{g^{-1}}\lambda\langle x\rangle$. Так как $(Z\cap M)^{g^{-1}}$ - $\langle x\rangle$ - допустимая подгруппа, то как было показано выше, она дополняема в группе M. Т.е. $M=(Z\cap M)^{g^{-1}}\cdot V$, где $(Z\cap M)^{g^{-1}}\cap V=E$. Но тогда $G=Z^{g^{-1}}V$ и $Z^{g^{-1}}\cap V=E$. В силу дополняемости группы $Z^{g^{-1}}$ в группе G следует дополняемость и группы Z в группе G. Ввиду произвольности выбора группы Z получаем, что M - C - сепарирующая подгруппа группы G. Достаточность доказана.

Теорема 5.I. доказана полностью.

Будем в дальнейшем называть группу, описанную в теореме 5.I., группой типа $\mathcal{F}_1$.

Л е м м а 5.I. Пусть конечная разрешимая группа $G=M\lambda\langle x\rangle$, где $x^p=1$, $p>2$ - простое число и $(|M|,p)=1$. Если M - C - сепарирующая подгруппа группы G, то

$$M=H\lambda(P\times S),$$

где $P\lambda\langle\bar{x}\rangle$ - силовская p - подгруппа группы G, причем $G=M\lambda\langle\bar{x}\rangle$, $H^{\bar{x}}=H$ и $S^{\bar{x}}=S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 4.4. группа $M=PH_1\dots H_n$, где $\{P, H_1, \dots, H_n\}$ – силовская база группы M такая, что $P\lambda\langle\bar{x}\rangle$ - силовская p - - подгруппа группы G, $H_i^{\bar{x}}=H_i$ для всех $i=1,2,\dots,n$. Ввиду следствия 4.I бипримарная группа PH_i, $i=1,2,\dots,n$, является вполне факторизуемой. Значит, группа PH_i представима в виде полупрямого произведения

$$PH_i = P\lambda H_i, \quad /37/$$

$$PH_i = H_i \lambda P \quad /38/$$

для всех $i=1,2,\dots,n$. Таким образом, группа $M=PLT$, где L и T - холловские подгруппы группы G, $PL = L\lambda P$, а $PT=P\lambda T$. Очевидно, группа $F=\langle (L\lambda P)^m, m\in T\rangle$ - инвариантна во всей группе G и представима в виде полупрямого произведения $F=H\lambda P$ /поскольку $P^m=P$ для всех элементов $m\in T$ /, где $H=\langle L^m, m\in T\rangle$. С другой стороны, по теореме I.2. из [6] группа $G=F\lambda\mathcal{D}$, причем, очевидно, $\mathcal{D}=(T\lambda\mathcal{D})\lambda\langle\bar{\bar{x}}\rangle$, где $G=M\lambda\langle\bar{\bar{x}}\rangle$. Следовательно, группа $M=H\lambda(P\lambda S)$, где $S=T\cap\mathcal{D}$. Осталось показать, что $H^{\bar{\bar{x}}}=H$. Но для этого достаточно показать, что $H^{\bar{x}}=H$ /поскольку в этом случае $H\lhd G$ /. Покажем последнее равенство.

В самом деле, для любого элемента $m\in T$ имеем, что $\bar{x}(mLm^{-1})\bar{x}^{-1}=(\bar{x}m\bar{x}^{-1})L^{\bar{x}}(\bar{x}m^{-1}\bar{x}^{-1})=m_1Lm_1^{-1}$, откуда $\bar{x}(mLm^{-1})\bar{x}^{-1}\subset H$. Т.е. $H^{\bar{x}}=H$. Этим заканчивается доказательство леммы 5.I.

Последовательно применяя лемму 5.I. и следствие II.8.3 из [6], мы получаем следующее утверждение.

Следствие 5.I. Пусть конечная разрешимая группа $G=M\lambda\langle x\rangle$, где $x^p=1$, p - простое число, бо́льшее двух, и $(|M|,p)\neq 1$. Если $M-C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то

$$M=H_1\lambda(H_1\lambda(\dots\lambda(H_n\lambda(P\lambda S)\dots),$$

где H_i - абелевы вполне факторизуемые $\langle\bar{x}\rangle$ - допустимые подгруппы, $i=1,2,\dots,n$, $P\lambda\langle\bar{x}\rangle$ - силовская p - подгруппа группы G, причем P - элементарная абелева группа, $S^{\bar{x}}=S$ и $G=M\lambda\langle\bar{x}\rangle$.

Т е о р е м а 5.2. Пусть конечная группа $G=M\leftthreetimes\langle x\rangle$, где x - элемент простого порядка $p>2$ и $(|M|,p)\neq 1$. Группа M тогда и только тогда является C - сепарирующей подгруппой группы G, когда она представима в виде

$$M=(((C_1\times F_1)\leftthreetimes((C_2\times F_2)\leftthreetimes(\ldots\leftthreetimes(C_n\times F_n)\ldots)\times P_1)\leftthreetimes(P_2\times S),$$

причем выполняются следующие условия:

1/ $(C_i\times F_i)$ - абелева вполне факторизуемая группа, $i=1,2,\ldots,n$;

2/ группа C_i разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $K_i=((C_i\times F_i)\leftthreetimes((C_{i+1}\times F_{i+1})\leftthreetimes(\ldots\leftthreetimes(C_n\times F_n)\ldots)\times P_1)\leftthreetimes(P_2\times S)$ и $F_i \trianglelefteq K_i$, для всех $i=1,2,\ldots,n$;

3/ $C=(C_1\leftthreetimes(C_2\leftthreetimes(\ldots\leftthreetimes C_n)\ldots)\leftthreetimes P_2)$ - вполне факторизуемая группа, а $F=F_1\leftthreetimes(F_2\leftthreetimes(\ldots\leftthreetimes F_n)\ldots)$ - абелева вполне факторизуемая группа, причем $C_F(P_1)=F$ и $F\leftthreetimes\langle\bar{x}\rangle$ - группа Фробениуса с инвариантным множителем F, и $G=M\leftthreetimes\langle\bar{x}\rangle$;

4/ для любой $\langle\bar{x}\rangle$ - допустимой подгруппы из группы F_i в ней найдется дополнение, инвариантное в группе K_i, $i=1,2,\ldots,n$;

5/ $(P_1\times P_2)\leftthreetimes\langle\bar{x}\rangle$ - силовская p - подгруппа группы G, причем P_1 разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе M, $(P_1\times P_2)$ - элементарная абелева группа, $P_1^{\bar{x}}=P_1$ и $P_2^{\bar{x}}=P_2$;

6/ S - группа типа $\mathcal{F}_1$;

7/ все силовские подгруппы группы M являются элементарными абелевыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Истинность п. 7 настоящей теоремы непосредственно следует из теоремы 3.3..

В силу следствия 5.1. группа

$$M=H_1\leftthreetimes(H_2\leftthreetimes(\ldots\leftthreetimes(H_n\leftthreetimes(P\leftthreetimes S)\ldots), \quad /39/$$

где H_i, $i=1,2,\ldots,n$, - абелевы вполне факторизуемые группы, $P\leftthreetimes\langle\bar{x}\rangle$ - силовская p - подгруппа

группы G, $H_i^{\bar{x}} = H_i$, $S^{\bar{x}} = S$ и $G = M \lambda \langle \bar{x} \rangle$.
А в силу леммы 4.7 соотношение /39/ примет следующий вид:

$$M = ((H_1 \lambda (H_2 \lambda (\dots \lambda H_n)\dots) \times P_1) \lambda (P_2 \times S), \quad /40/$$

где $P_1 = [P, S]$ и $P_2 = C_P(S)$, причем, очевидно, $P_1^{\bar{x}} = P_1$ и $P_2^{\bar{x}} = P_2$. Тогда ввиду леммы 4.2 группа P_1 разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе M. Пункт 5 теоремы 5.2. доказан.

Поскольку в группе $S \lambda \langle \bar{x} \rangle$, S – C - сепарирующая ее подгруппа, то, очевидно, в силу теоремы 5.I., S - - группа типа $\mathcal{F}_1$. Пункт 6 доказан.

Перейдем к доказательству оставшихся пунктов I-4 настоящей теоремы.

Пункт I, очевидно, справедлив, поскольку в соотношении /40/ подгруппы H_i, $i = 1, 2, \dots, n$, являются вполне факторизуемыми.

Далее, поскольку H_1 - абелева инвариантная в G ее подгруппа, то произвольная силовская подгруппа V группы H_1 инвариантна в группе G. Поэтому для доказательства пунктов 2 и 4 теоремы 5.2., очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда H_1 - примарная группа, скажем, порядка q^ℓ, q - простое число. Так как все силовские подгруппы группы M элементарные абелевы, то силовская q - подгруппа V_1 группы K_2 действует тождественно на H_1. Поэтому, не теряя общности рассуждений, полагаем, что $V_1 = E$. Значит, H_1 - силовская q - - подгруппа группы G. Тогда, в силу теоремы Машке, $H_1 = W_1 \times W_2 \times \dots \times W_z$, где W_i, $i = 1, 2, \dots, z$, - минимальные нормальные делители группы G. Возможны только два случая:

I. $C_{W_i}(P_2) = W_i$, либо

2. $C_{W_i}(P_2) \neq W_i$, $i = 1, 2, \dots, z$.

В первом случае, в силу теоремы 5.I., группа

$$W_i = C_{1i} \times F_{1i},$$

где C_{1i} - группа, представимая в виде прямого произведения циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе M, а $C_{F_i}(\langle\bar{x}\rangle)=E$.

Во втором случае, в силу леммы 4.3. группа $W_i \lambda P_2$ является вполне факторизуемой, а следовательно $p/(q-1)$. Но тогда, ввиду предложения I.I., группа $W_i \lambda \langle\bar{x}\rangle$ также является вполне факторизуемой. Рассмотрим тогда группу $R_1 = (W_i \lambda (H_2 \lambda (\ldots \lambda H_n) \lambda \mathcal{S}') \ldots) \lambda \langle\bar{x}\rangle$. Пусть R_{11} - произвольная минимальная нормальная подгруппа группы R_1 из W_i. Поскольку $R_{11} \lambda \langle\bar{x}\rangle$ - вполне факторизуемая группа, то в R_{11} найдется подгруппа Q такая, что $|R_{11}:Q|=q$ и $Q^{\bar{x}}=Q$. Поэтому

$$(R_{11} \lambda (H_2 \lambda (\ldots \lambda H_n) \lambda \mathcal{S}) \ldots) \lambda \langle\bar{x}\rangle = (Q \lambda \langle\bar{x}\rangle)(\langle u\rangle \lambda T),$$

где $Q \times \langle u\rangle = R_{11}$ и $T=(H_2 \lambda (\ldots \lambda H_n) \lambda \mathcal{S}) \ldots)$. Тогда по теореме Клиффорда 44.3.I. [II] группа R_{11} разложима в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $L=(W_i \lambda (H_2 \lambda (\ldots \lambda H_n) \lambda \mathcal{S}') \ldots)$. А значит и вся группа W_i разложима в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе L_1.

П р и м е ч а н и е 4. Мимоходом, при рассмотрении этого случая, мы получаем, что либо силовская q - подгруппа группы H_1 лежит в $C_{H_1}(P)$, либо эта силовская q - подгруппа представима в виде прямого произведения циклических подгрупп простого порядка, инвариантных в группе L.

Таким образом, исходя из рассмотрения случаев I и 2, группа $H_1 = F_1 \times C_1$, где $C_{F_1}(P_2)=F_1$ и $C_{F_1}(\langle\bar{x}\rangle)=E$, а группа C_1 представима в виде прямого произведения циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $L_1=((H_1 \lambda (H_2 \lambda (\ldots \lambda H_n) \ldots) \times P_1) \lambda \mathcal{S}$.

Проводя аналогичные рассуждения для групп H_i, $i = 2,3,\ldots,n$, получаем, что

$$M=((C_1 \times F_1) \lambda ((C_2 \times F_2) \lambda (\ldots \lambda (C_n \times F_n) \ldots) \times P_1) \lambda (P_2 \times \mathcal{S}'), \quad /41/$$

где $C_{F_i}(P_2)=F_i$ и $C_{F_i}(\langle\bar{x}\rangle)=E$, группа C_i разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе $L_i=((C_i \times F_i) \lambda (\ldots \lambda (C_n \times F_n) \ldots) \times P_1) \lambda \mathcal{S}$, $F_i \triangleleft G$, $C_i \triangleleft G$, $i=1,2,\ldots,n$.

Теперь в силу теоремы I.I. из [4] группа $C_0=C_1\lambda(C_2\lambda(\ldots\lambda C_n)\ldots)$ является вполне факторизуемой. Тогда, уже в силу леммы 4.5, группа $C=C_0\lambda P_1$ является вполне факторизуемой. Теперь, поскольку $C_{F_i}(P)=F_i$, $i=1,2,\ldots,n$, то, в силу теоремы 5.I группа F - абелева вполне факторизуемая и $F\lambda\langle\bar{x}\rangle$ - группа Фробениуса с инвариантным множителем F. Значит, пункт 3 теоремы 5.2. доказан.

Вернемся к тому, что группа $C=C_0\lambda P_2$ является вполне факторизуемой. Тогда $C=C_{01}\lambda(C_{02}\times P_2)$, где $C_0=C_{01}\lambda C_{02}$ и C_{01} и C_{02} - абелевы вполне факторизуемые группы. Но тогда в силу соотношения /4I/ группа

$$M=\langle C_{01}, P\times N\rangle. \qquad /42/$$

Теперь, поскольку группа C_i, в силу упомянутого выше, разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе L_i, а с другой стороны, в силу леммы 4.3 $C_i\lambda P$ - вполне факторизуемая группа, то по предложению I.2 группа C_i представима в виде прямого произведения циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе K_i, $i=1,2,\ldots,n$. Пункт 2 теоремы 5.2 доказан.

Осталось доказать пункт 4 теоремы 5.2.

В самом деле, поскольку $F_i\lambda P=F_i\times P$, то в силу теоремы 5.I пункт 4 теоремы 5.2. доказан.

Доказательство необходимости закончено.

Достаточность. Пусть T - произвольная $\langle\bar{x}\rangle$ - допустимая подгруппа из группы M. То, что группа T имеет дополнение в группе M, доказывается аналогично доказательству достаточности теоремы 5.I..

Пусть теперь T - произвольная $\langle\bar{x}^{\alpha}f_1f_2\rangle$ - допустимая подгруппа из группы M, где $f_1\in P_1$ и $f_2\in P_2$ и $0<\alpha<p$. Покажем, что T имеет дополнение в группе M.

I. Пусть $T\subset(C_1\times F_1)$.

В силу примечания 4 группа $C_1=R_{11}\times R_{21}$, где R_{11} и $(R_{21}\times F_1)$ - холловские подгруппы группы $C_1\times F_1$ и $C_{R_{21}}(P_2)=R_{21}$. Поэтому $T=(T\cap R_{11})\times(T\cap R_{21})$. Очевидно, подгруппа $T\cap R_{11}$ имеет дополнение в группе R_{11}, инвариантное в группе M, а $(T\cap R_{11})-\langle\bar{x}\rangle$ - допустимая подгруппа. Следовательно, вся подгруппа T имеет в группе $C_1\times F_1$ дополнение, инвариантное в группе M. Т.е. T дополняема в группе M.

В дальнейшем доказательство проводится аналогично доказательству достаточности теоремы 5.I с учетом того факта, что $C_i = R_{1i}\times R_{2i}$, где $(R_{2i}\times F_i)$ и R_{1i} - холловские подгруппы группы $C_i\times F_i$ - и $C_{R_{2i}}(P_2)=R_{2i}$, $i=2, 3,\dots,n$.

Пусть теперь $\bar{Z}$ - произвольная подгруппа группы G, не лежащая в группе M. Поскольку все силовские p -подгруппы группы G сопряжены, то существует подгруппа Z, сопряженная с $\bar{Z}$ такая, что в ней найдется элемент $\bar{x}^{\alpha}f_1 f_2$, где $0<\alpha<p$, $f_1\in P_1$ и $f_2\in P_2$. Тогда подгруппа $M\cap Z$ дополняема в группе M, поскольку $(M\cap Z)\triangleleft M$. Т.е.

$$M=(M\cap Z)\cdot D ,$$

где $(M\cap Z)\cap D = E$. Но тогда, очевидно, $G = ZD$, поскольку $|Z:(M\cap Z)|=p$. Также очевидно, что $Z\cap \cap D = E$. Тогда в группе G дополняема и подгруппа $\bar{Z}$. В силу произвольности ее выбора получаем, что M-C- сепарирующая подгруппа группы G. Достаточность доказана.

Теорема 5.2 доказана полностью.

В дальнейшем будем называть группу, описанную в теореме 5.2, группой типа $\mathcal{F}_2$.

Т е о р е м а 5.3. Пусть конечная разрешимая группа $G = M \leftthreetimes \langle x\rangle$, где $x^2=1$. Группа M тогда и только тогда будет C - сепарирующей подгруппой группы G, когда группа G разлагается в полупрямое произведение

$$G = B \leftthreetimes \langle x\rangle ,$$

где B - вполне факторизуемая группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Если группа M имеет нечетный порядок, то настоящая теорема доказана в силу примечания 3.

Если группа M имеет четный порядок, то в силу теоремы 3.3 возможны два случая. А именно:

1/ силовская 2-подгруппа группы M элементарная абелева,

2/ силовская 2-подгруппа U группы G имеет вид: $U = Z_1 \times ((\langle z\rangle \times \langle y\rangle)\lambda\langle x\rangle)$, где Z_1 - элементарная абелева 2-подгруппа, $z^2 = y^2 = 1$, $z^x = z$, $y^x = zy$ и $Z_1 \times \langle xy\rangle$ - силовская 2-подгруппа группы M.

В первом случае, в силу леммы 4.6, группа M является вполне факторизуемой, а следовательно теорема 5.3 доказана. Случай I рассмотрен.

Во втором случае, в силу леммы 4.I, группа $G = H\lambda U$, где, очевидно, подгруппа H лежит в группе M. А ввиду леммы 4.6 группа $K = H\lambda(Z_1\times\langle z\rangle)$ является вполне факторизуемой. Значит, $K = H_1\lambda(H_2\times Z_1\times\langle z\rangle)$, где $H = H_1\lambda\lambda H_2$, $H_1^x = H_1^y = H_1$ и $H_2^x = H_2^y = H_2$, H_1 и H_2 - абелевы вполне факторизуемые группы. Покажем, что группа $B = K\lambda\langle y\rangle$ является вполне факторизуемой.

Поскольку все силовские подгруппы группы H_1 инвариантны в группе G, то, очевидно, для доказательства нашего предположения достаточно рассмотреть случай, когда H_1 - примарная группа, скажем, порядка q^l, q - простое число. Теперь ввиду того, что силовская q - подгруппа группы H_2 лежит в $C_K(H_1)$, можем предположить, не теряя общности рассуждений, что $(|H_1|, |H_2|) = 1$, т.е. H_1 - силовская q - подгруппа группы G. И последнее, в силу теоремы Машке, достаточно рассмотреть случай, когда H_1 - минимальный нормальный делитель группы G.

Тогда либо $C_{H_1}(H_2) = H_1$, либо $C_{H_1}(H_2) = E$. В первом случае, очевидно, группа B является вполне факторизуемой. Значит, будем предполагать, что $C_{H_1}(H_2) = E$.

Далее, если $C_{H_2}(\langle y\rangle) = H_2$, то, в силу предложения I.2., группа B будет вполне факторизуемой. Если же $C_{H_2}(\langle y\rangle) \neq H_2$, то, очевидно, достаточно предположить для доказательства нашего утверждения, что $C_{H_2}(\langle y\rangle) = E$.

Теперь, поскольку группа $H_1\lambda(Z_1\times\langle z\rangle\times\langle x\rangle)$ является вполне факторизуемой, то в группе H_1 найдется подгруппа R

такая, что $|H_1 : R| = g$ и $R \triangleleft (H_1 \lambda (Z_1 \times \langle z \rangle \times \langle x \rangle))$. Но тогда, очевидно,

$G = (R \lambda (Z_1 \times \langle z \rangle \times \langle x \rangle)^g) \cdot (\langle u \rangle \lambda (H_2 \lambda \langle f^{\alpha} y \rangle)$, /43/

где $g \in G$, $H_1 = R \times \langle u \rangle$ и $f^{\alpha} \in (Z_1 \times \langle z \rangle)$ /соотношение /43/ возможно в силу дополняемости подгруппы $(R \lambda (Z_1 \times \langle z \rangle \times \langle x \rangle))$ во всей группе G /.

В силу теоремы I.I [4] группа $W = \langle u \rangle \lambda (H_2 \lambda \langle f^{\alpha} y \rangle)$ является вполне факторизуемой, а так как $C_{H_1}(H_2) = E$, то $C_{H_2}(\langle f^{\alpha} y \rangle) \neq E$. Следовательно, $C_{H_2}(\langle y \rangle) \neq E$, поскольку $C_{H_2}(\langle f^{\alpha} \rangle) = H_2$. Получили противоречие с тем, что $C_{H_2}(\langle y \rangle) = E$. Значит, $C_{H_2}(\langle y \rangle) = H_2$, а поэтому, в силу предложения I.2, группа B является вполне факторизуемой. Таким образом, $G = B \lambda \langle x \rangle$, где B - вполне факторизуемая группа. Необходимость доказана.

Достаточность очевидна, если заметить, что группа B - дополняемая в группе G ее C - сепарирующая подгруппа.

Теорема 5.3 доказана полностью.

Примечание 5. Легко заметить, что группа, описанная в теореме 5.3, есть группа либо типа $\mathcal{F}_1$, либо- $\mathcal{F}_2$.

Теперь, в силу теоремы 3.3., 5.I., 5.2., 5.3. и примечания 5 получаем утверждение, дающее полное описание конечных разрешимых групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую подгруппу.

Теорема 5.4. Конечная разрешимая группа G тогда и только тогда имеет хотя бы одну дополняемую в G C - сепарирующую подгруппу, когда G - группа либо типа $\mathcal{F}_1$, либо типа $\mathcal{F}_2$.

§ 6. Разрешимость конечных групп, имеющих дополняемые в них C - сепарирующие подгруппы

В этом параграфе доказывается разрешимость конечных групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую подгруппу.

Вначале сформулируем ряд вспомогательных определений и утверждений.

Определение 6.1 [10]. Всякая конечная группа G является расширением разрешимой группы при помощи полупростой группы.

Определение 6.2 [10]. Группа G называется вполне приводимой, если она разлагается в прямое произведение конечного числа простых групп.

Лемма 6.1 [10]. Всякая конечная группа G обладает единственным максимальным вполне приводимым нормальным делителем без центра. Если G - конечная полупростая группа, отличная от E, то ее максимальный вполне приводимый нормальный делитель H не имеет центра и не равен E.

Лемма 6.2. (Walter) [12]. Пусть G есть простая, неабелевая A - группа. Тогда G изоморфна $J(11)$, группе Янко /см. работу [13]/, или G изоморфна $PSL(2,p^n)$ для $p^n > 3$ и $p^n = 0, 3$ или $5 \pmod 8$.

Лемма 6.3 из [13]. Внешние автоморфизмы группы $J(11)$ тривиальны.

Лемма 6.4 из [14]. Если $G \cong PSL(2,p^n)$, то группа внешних автоморфизмов группы G равна прямому произведению $Z_1 \times Z_2$, где Z_1 - циклическая группа порядка n, а Z_2 - группа порядка 1 или 2 в зависимости от того, четно простое число p или нет.

Теперь рассмотрим ряд результатов, необходимых для доказательства разрешимости конечных групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую подгруппу.

Лемма 6.5. Пусть конечная группа $G = H \lambda \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ - силовская подгруппа группы G простого порядка p. Если $H - C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то G - разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S - произвольная силовская q - подгруппа группы H, q - простое число. В силу теоремы 4.2.4 [9], в группе G существует силовская подгруппа $G_p = <\bar{x}>$, очевидно, сопряженная с подгруппой $<x>$, такая, что $S^{\bar{x}} = S$. Тогда, ввиду дополняемости подгруппы $(S \lambda <\bar{x}>)$ в группе G, получаем равенство $G = (S \lambda <\bar{x}>) \cdot T$, где $(S \lambda <\bar{x}>) \cap \cap T = E$. Поскольку порядки подгрупп T и $<\bar{x}>$ взаимнопросты, то $T \subset H$. Следовательно, $H = S \cdot T$. В силу произвольности выбора силовской q - подгруппы S группы H получаем дополняемость всех силовских подгрупп группы H. Значит, G является разрешимой группой.

Лемма 6.5 доказана.

Л е м м а 6.6. Пусть $G = H \lambda <x>$, где $x^p = 1$ и p - простое число. Если $H-C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то силовская подгруппа H_p группы H дополняема в H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме I.I. из [6] силовская p - подгруппа группы G представима в виде полупрямого произведения $H_p \lambda <x>$, где H_p - силовская p - - подгруппа группы H. А поскольку $H-C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то $G = (H_p \lambda <x>) \cdot D$, причем $(H_p \lambda <x>) \cap D = E$. Ввиду взаимной простоты порядков подгрупп D и $<x>$ легко видеть, что $D \subset H$. Поэтому $H = H_p D$ и $H_p \cap D = E$, что и требовалось доказать.

Л е м м а 6.7. Пусть $G = H \lambda <x>$, где $x^2 = 1$. Если $H-C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то G разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о, Если порядок группы H нечетный, то в силу теоремы Фейта - Томпсона, группа G разрешима.

Пусть порядок группы H четный. В силу леммы I.I [6] силовская 2 - подгруппа группы G представима в виде $H_2 \leftthreetimes \langle x \rangle$, где H_2 - силовская 2-подгруппа группы H. Очевидно, $N_H(H_2)$ является $\langle x \rangle$ - допустимой подгруппой. Тогда, в силу теоремы Фейта-Томпсона, группа $L = N_H(H_2) \leftthreetimes \langle x \rangle$ разрешима. Значит, в группе L применимы результаты предыдущих параграфов. Тогда, ввиду леммы 4.I, 4.5 и примечания 3, группа H_2 лежит в центре своего нормализатора $N_H(H_2)$. Тогда по теореме Бернсайда I4.2.I из [9] группа $H = F \leftthreetimes H_2$. Поскольку группа F имеет нечетный порядок, то F разрешима, а следовательно, разрешима и вся группа G.

Лемма 6.7 доказана.

П р е д л о ж е н и е 6.I. Пусть $G = H \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $x^2 = 1$ и 2 - простое число. Если H - C - сепарирующая подгруппа группы G, то H не является простой неабелевой группой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть настоящее предложение не выполняется. Тогда группа H является простой неабелевой группой. В силу теоремы 3.3 все силовские подгруппы H абелевы. Следовательно, по лемме 6.2 из [I2], группа H изоморфна либо группе $J(11)$, либо $PSL(2, p^n)$ для $p^n > 3$ и $p^n \equiv 0, 3$, или $5 \pmod 8$.

Если $H \cong J(11)$, то в силу леммы 6.3 получаем, что $G = J(11) \times \langle y \rangle$. Поскольку $J(11)$ - C - сепарирующая подгруппа группы G, то для любой подгруппы $\mathcal{D}$ из $J(11)$ имеем равенство:

$$G = (\langle y \rangle \times \mathcal{D}) \cdot K = \mathcal{D} \cdot (\langle y \rangle \times K),$$

где $(\langle y \rangle \times \mathcal{D}) \cap K = E$. В силу дополняемости подгруппы $\mathcal{D}$ в группе G, получаем дополняемость подгруппы $\mathcal{D}$ и в группе $J(11)$. Т.е. $J(11)$ - вполне факторизуемая группа. Получили противоречие.

Пусть теперь $H \cong PSL(2, p^n)$ для $p^n > 3$ и $p^n \equiv 0, 3$, или $5 \pmod 8$. В силу теоремы 3.3 и леммы 6.6 среди этой серии $PSL(2, p^n)$ выбираем группы у которых:

I/ силовские подгруппы абелевы;

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S - произвольная силовская q - подгруппа группы H, q - простое число. В силу теоремы 4.2.4 [9], в группе G существует силовская подгруппа $G_p = \langle \bar{x} \rangle$, очевидно, сопряженная с подгруппой $\langle x \rangle$, такая, что $S^{\bar{x}} = S$. Тогда, ввиду дополняемости подгруппы $(S \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle)$ в группе G, получаем равенство $G = (S \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle) \cdot T$, где $(S \leftthreetimes \langle \bar{x} \rangle) \cap \cap T = E$. Поскольку порядки подгрупп T и $\langle \bar{x} \rangle$ взаимнопросты, то $T \subset H$. Следовательно, $H = S \cdot T$. В силу произвольности выбора силовской q - подгруппы S группы H получаем дополняемость всех силовских подгрупп группы H. Значит, G является разрешимой группой.

Лемма 6.5 доказана.

Л е м м а 6.6. Пусть $G = H \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $x^p = 1$ и p - простое число. Если $H - C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то силовская подгруппа H_p группы H дополняема в H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме I.I. из [6] силовская p - подгруппа группы G представима в виде полупрямого произведения $H_p \leftthreetimes \langle x \rangle$, где H_p - силовская p - - подгруппа группы H. А поскольку $H - C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то $G = (H_p \leftthreetimes \langle x \rangle) \cdot D$, причем $(H_p \leftthreetimes \langle x \rangle) \cap D = E$. Ввиду взаимной простоты порядков подгрупп D и $\langle x \rangle$ легко видеть, что $D \subset H$. Поэтому $H = H_p D$ и $H_p \cap D = E$, что и требовалось доказать.

Л е м м а 6.7. Пусть $G = H \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $x^2 = 1$. Если $H - C$ - сепарирующая подгруппа группы G, то G разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о, Если порядок группы H нечетный, то в силу теоремы Фейта - Томпсона, группа G разрешима.

Пусть порядок группы H четный. В силу леммы I.I [6] силовская 2 - подгруппа группы G представима в виде $H_2 \leftthreetimes \langle x \rangle$, где H_2 - силовская 2-подгруппа группы H. Очевидно, $N_H(H_2)$ является $\langle x \rangle$ - допустимой подгруппой. Тогда, в силу теоремы Фейта-Томпсона, группа $L = N_H(H_2) \leftthreetimes \langle x \rangle$ разрешима. Значит, в группе L применимы результаты предыдущих параграфов. Тогда, ввиду леммы 4.I, 4.5 и примечания 3, группа H_2 лежит в центре своего нормализатора $N_H(H_2)$. Тогда по теореме Бернсайда I4.2.I из [9] группа $H = F \leftthreetimes H_2$. Поскольку группа F имеет нечетный порядок, то F разрешима, а следовательно, разрешима и вся группа G.

Лемма 6.7 доказана.

П р е д л о ж е н и е 6.I. Пусть $G = H \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $x^r = 1$ и r - простое число. Если H - C - сепарирующая подгруппа группы G, то H не является простой неабелевой группой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть настоящее предложение не выполняется. Тогда группа H является простой неабелевой группой. В силу теоремы 3.3 все силовские подгруппы H абелевы. Следовательно, по лемме 6.2 из [I2], группа H изоморфна либо группе $J(11)$, либо $PSL(2, p^n)$ для $p^n > 3$ и $p^n \equiv 0, 3$, или $5 \pmod 8$.

Если $H \cong J(11)$, то в силу леммы 6.3 получаем, что $G = J(11) \times \langle y \rangle$. Поскольку $J(11)$ - C - сепарирующая подгруппа группы G, то для любой подгруппы $\mathcal{D}$ из $J(11)$ имеем равенство:

$$G = (\langle y \rangle \times \mathcal{D}) \cdot K = \mathcal{D} \cdot (\langle y \rangle \times K),$$

где $(\langle y \rangle \times \mathcal{D}) \cap K = E$. В силу дополняемости подгруппы $\mathcal{D}$ в группе G, получаем дополняемость подгруппы $\mathcal{D}$ и в группе $J(11)$. Т.е. $J(11)$ - вполне факторизуемая группа. Получили противоречие.

Пусть теперь $H \cong PSL(2, p^n)$ для $p^n > 3$ и $p^n \equiv 0, 3$, или $5 \pmod 8$. В силу теоремы 3.3 и леммы 6.6 среди этой серии $PSL(2, p^n)$ выбираем группы у которых:

I/ силовские подгруппы абелевы;

2/ одна из силовских подгрупп дополняема в группе H. Следуя результатам, полученным в работе [15], получаем, что группа H может быть изоморфна только группам следующего типа:

$H \cong PSL(2, p^n)$, где

I/ $p^n \equiv 3 \pmod 4$;

2/ $p = 2$ и $n \geq 4$;

3/ $p = 2$ и $n = 2$;

4/ $p = 11$ и $n = 1$;

5/ $p = 7$ и $n = 1$.

Рассмотрим все эти случаи по порядку.

I/ $H \cong PSL(2, p^n)$, где $p^n \equiv 3 (mod 4)$.

В этом случае группа H допускает только одну факторизацию $H = \mathcal{N}\mathcal{D}$, где $|\mathcal{N}| = p^n(p^n-1)/2$ и $|\mathcal{D}| = p^n+1$. Тогда, в силу леммы 6.6, либо подгруппа $\mathcal{N}$, либо подгруппа $\mathcal{D}$ является силовской подгруппой группы H. Если $\mathcal{N}$ - силовская подгруппа группы H, то она должна быть примарной группой. Т.е. $p^n(p^n-1)/2 = p^\ell$, откуда $p^{n-\ell}(p^n-1) = 2$, а следовательно, $p^n = 3$. В этом случае группа $H \cong PSL(2,3) \cong A_4$. Получили противоречие с простотой группы H.

Тогда $\mathcal{D}$ - силовская подгруппа группы H. Очевидно, $\mathcal{D}$ - 2-силовская подгруппа группы H. В силу леммы 6.6 $x^2=1$. Но тогда по лемме 6.7 группа G разрешима. Опять получили противоречие. Случай I исчерпан.

2/ $H \cong PSL(2, 2^n)$, где $n \geq 4$.

В этом случае группа H допускает только одну точную факторизацию $H = \mathbb{Z} N$, где $|N| = 2^n(2^n-1)$ и $\mathbb{Z}$ - циклическая подгруппа порядка 2^n+1. Тогда, в силу леммы 6.6, либо подгруппа N, либо подгруппа $\mathbb{Z}$ является силовской подгруппой группы H. Если N - силовская подгруппа группы H, то N - примарная группа, а посему $2^n(2^n-1) = 2^\ell$, откуда $2^n = 2$, а значит, $n = 1$. Получили противоречие с тем, что $n \geq 4$.

Если $\mathbb{Z}$ - силовская подгруппа группы H, то в силу теоремы 3.3 $|\mathbb{Z}| = 2^n + 1$ - число простое. Но тогда, в силу леммы 6.6 , $|x| = 2^n + 1$. С другой стороны, либо $G = H \times \langle x \rangle$, либо $G \neq H \times \langle x \rangle$.

В первом случае для любой подгруппы D из группы H имеем:

$$G = (D \times \langle x \rangle) \cdot K = (\langle x \rangle \times K) \cdot D,$$

где $K \cap D = E$. В силу дополняемости подгруппы D в группе G следует дополняемость подгруппы D и в группе H . Значит, H - вполне факторизуемая группа. Получили противоречие.

Во втором случае, в силу леммы 6.4 из [I4], $|x| \leq 2n$. Но, очевидно, для $n \geq 4$ верно неравенство $2^n + 1 > 2n$. Получили опять противоречие. Случай 2 рассмотрен.

3/ $H \cong PSL(2, 2^2) \cong A_5$.

В этом случае группа H допускает только точную факторизацию $H = ZN$, где $|Z| = 5$ и $|N| = 12$. Тогда, в силу леммы 6.6 , $|x| = 5$.

Если $H \lambda \langle x \rangle = H \times \langle x \rangle$, то легко показать, что H - - вполне факторизуемая группа, что противоречит строению группы A_5.

Если $H \lambda \langle x \rangle \neq H \times \langle x \rangle$, то в силу леммы 6.4 [I4] $|x| \leq 4$. Опять получили противоречие с тем, что $|x| = 5$. Случай 3 исчерпан.

4/ $H \cong PSL(2, 11)$.

В этом случае в группе H дополняема только силовская 11 - подгруппа. Тогда в силу леммы 6.6 $|x| = 11$.

Если $H \lambda \langle x \rangle = H \times \langle x \rangle$, то легко показать, что H - вполне факторизуемая группа, что противоречит ее простоте.

Значит, $H \lambda \langle x \rangle \neq H \times \langle x \rangle$. В этом случае, в силу леммы 6.4 из [I4], $|x| \leq 2$. Получили противоречие с тем, что $|x| = 11$. Случай 4 рассмотрен.

5/ $H \cong PSL(2, 7)$.

В этом случае группа H допускает только две точные факторизации $H = ZS_4$ и $H = ND$, где $|Z| = 7$, $|D| = 8$ и $|N| = 7 \cdot 3$. Т.е. в группе H дополняема силовская 2-подгруппа D и силовская 7-подгруппа Z .

Тогда в силу леммы 6.6 $|x| = 2$, либо $|x| = 7$.

Если $|x| = 2$, то в силу леммы 6.7 группа H разрешима. Пришли к противоречию.

Если $|x| = 7$, то либо $H \leftthreetimes \langle x \rangle = H \times \langle x \rangle$, либо $H \leftthreetimes \langle x \rangle \neq H \times \langle x \rangle$. В первом случае легко показать, что H - вполне факторизуемая группа, что противоречит ее простоте. Во втором случае, в силу леммы 6.4 из [14], $|x| \leq 2$, что противоречит равенству $|x| = 7$. Случай 5 исчерпан.

В силу полученных противоречий предложение 6.I доказано.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству основного утверждения настоящего параграфа.

Т е о р е м а 6.I. Если конечная группа G имеет хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу, то она разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку фактор-группа $G/C(G)$ является вполне факторизуемой, где $C(G)$ -сепаратор группы G, то, очевидно, для доказательства настоящего предложения достаточно доказать разрешимость группы $C(G)$.

Пусть x - элемент простого порядка z, не лежащий в сепараторе $C(G)$ /его существование следует из предложения I.I./. Рассмотрим группу $R = C(G) \leftthreetimes \langle x \rangle$, и предположим, что $C(G)$ не является разрешимой группой. Тогда, в силу леммы 6.I и леммы I.4., в группе R существует такая нормальная разрешимая группа L, что $R/L = \overline{R} = \overline{C(G)} \leftthreetimes \langle \overline{x} \rangle$ и $\overline{C(G)}$ - полупростая группа, являющаяся C - сепарирующей подгруппой группы $\overline{R}$, а $\overline{x}^z = 1$. Теперь в силу леммы 6.2 в группе $\overline{C(G)}$ найдется вполне приводимый нормальный делитель H без центра такой, что $\overline{H}^{\overline{x}} = \overline{H}$. Рассмотрим группу $S = H \leftthreetimes \langle \overline{x} \rangle$, и сразу отметим, что H - C - сепарирующая подгруппа группы S. Далее, в силу определения 6.2, группа $H = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, где A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть простые группы, причем поскольку $Z(H) = E$, то все они неабелевы. Тогда, не теряя общности рассуждений, имеем, что $A_i^{\overline{x}} = A_{i+1}$,

$i=1,2,\dots,(n-1)$ и $A_n^{\bar{x}} = A_1$, причем, в силу предложения 6.I , $i > 1$. Поэтому, очевидно, $C_H(\langle\bar{x}\rangle) \cong A_1$. Рассмотрим группу $C_H(\langle\bar{x}\rangle)\times\langle\bar{x}\rangle$. Для любой подгруппы $\mathcal{D}$ из группы $C_H(\langle\bar{x}\rangle)$ группа $C_H(\langle\bar{x}\rangle)\times\langle\bar{x}\rangle=(\mathcal{D}\times\langle\bar{x}\rangle)K=\mathcal{D}(\langle\bar{x}\rangle\times K)$, где $\mathcal{D}\cap K=E$. Значит, $C_H(\langle\bar{x}\rangle)$ - вполне факторизуемая группа. Получили противоречие.

Теорема 6.I доказана.

§ 7. Заключение

Итогом параграфов 5 и 6 является следующий результат, дающий полное описание конечных групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе C - сепарирующую подгруппу.

Теорема 7.I. Конечная группа тогда и только тогда имеет хотя бы одну дополняемую в ней C - сепарирующую подгруппу, когда она является группой типа $\mathcal{F}_1$, либо $\mathcal{F}_2$.

Легко видеть, что вполне факторизуемая группа, а также группа, представимая в виде полупрямого произведения $B\lambda\langle x\rangle$ двух подгрупп, первая из которых вполне факторизуемая, а вторая - циклическая простого порядка, принадлежат одному из типов $\mathcal{F}_1$, либо $\mathcal{F}_2$.

В конце работы стоит объяснить связь между полученным выше классом групп и классом непримарно-факторизуемых групп /т.е. групп, у которых дополняема всякая непримарная подгруппа/.

Предложение 7.I. Если группа G удовлетворяет условиям пункта I или 2 теоремы [I6] , то G обладает дополняемой в ней C - сепарирующей подгруппой.

Доказательство настоящего утверждения очевидно, если заметить, что инвариантная элементарная абелева силовская p - подгруппа группы G является ее C - сепарирующей подгруппой.

В случае, когда группа G удовлетворяет условиям пункта 3 теоремы [I6], в силу леммы 4.2 она необязательно обладает C - сепарирующими подгруппами.

ЛИТЕРАТУРА

I. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп.- М.: Н аука, 1980. - 384с.

2. Черников С.Н. Группы, имеющие сепарирующие подгруппы.- В кн.: Группы с заданными свойствами подгрупп.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973, с.6-14.

3. Барыповец П.П. Конечные группы, имеющие $\mathfrak{F}$-сепарирующие подгруппы.- В кн.: Некоторые вопросы теории групп.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975, с.75-100.

4. Черникова Н.В. Группы с дополняемыми подгруппами.- Мат. сб., 1956, 39, №3, с.273-292.

5. Taunt D. On A-groups. - Proc. Cambr. Phil. Soc., 1949, 45, N1, p. 24-42.

6. Шеметков Л.А. Формации конечных групп.- М.: Наука, 1978. -268с.

7. Itô N. Über das Product von zwei abelschen Gruppen. — Math. Z., 1955, 62, s. 400-401.

8. Gorenstein D. Finite Groups. — Harper and Row, New-York, 1968. — 527p.

9. Холл М. Теория групп.- М.: Изд-во иностр. лит., 1962.- -288с.

10. Курош А.Г. Теория групп.- М.: Наука, 1967.-648с.

11. Мерзляков Ю.И. Рациональные группы.- М.: Наука, 1980.- -464с.

12. Brosh A. M. Finite Groups Whose Sylow Subgroups are Abelian. - J. Algebra, 1971, 17, N1, p.74-82.

13. Janko Z. A new finite simple group with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization. - J. Algebra, 1966, 3, N2, p. 147-186.

14. Dieudonne J. On the automorphisms of the classical groups. — Memoirs Amer. Math. Soc.,

1951, N2, p. 1-95.
I5. Ito N. On the factorizations of the linear fractional group $LF(2,p^n)$. — Acta scient. math. Szeged, 1953, 15, N1, ss. 79-84.
I6. Алексеева Э.С. Конечные непримарно факторизуемые группы.- В кн.: Группы с системами дополняемых подгрупп.-Киев: Ин-т математики АН УССР, I97I, с.I47-I79.

Спиваковский Александр Владимирович

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ИМЕЮЩИХ С-СЕПАРИРУЮЩИЕ ПОДГРУППЫ

Препринт

Редактор Н.И.Коваленко

Подп.в печ. 22.03.84. БФ II222. Формат 60х84/16. Бумага тип.
Офс.печать. Усл.печ.л. 3,72. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж I40 экз.
Заказ 207 . Цена 30 коп.

Отпечатано в Институте математики АН УССР
252601, Киев, ГСП, ул. Репина,3