УДК 519.41/47

В. А. Крекнин, А. В. Спиваковский

Об одном классе групп, имеющем C-сепарирующие подгруппы

Пусть C — свойство подгруппы быть дополняемой во всей группе G. В соответствии с работой С. Н. Черникова [1], собственную подгруппу N группы G назовем C-сепарирующей подгруппой группы G, если каждая подгруппа из G, не содержащаяся в N, дополняема во всей группе G.

В работе [2] приведено конструктивное описание конечных групп, имеющих хотя бы одну дополняемую во всей группе ее C-сепарирующую подгруппу, а также доказана разрешимость таких групп. Основная задача настоящей работы заключается в доказательстве разрешимости произвольных конечных групп, имеющих C-сепарирующие подгруппы. Кроме этого, рассматривается строение примарных конечных групп, имеющих дополняемые C-сепарирующие подгруппы, полученное с помощью критериев абелевости и элементарной абелевости нормального делителя примарной конечной группы, имеющих самостоятельный интерес. Тема работы предложена С. Н. Черниковым.

1. Предварительные и вспомогательные результаты.

Теорема 4.2 [3]. *Если G — простая K-группа с холловской $2'$-подгруппой, то $G \cong PSL(2, p)$, где p — простое число Мерсена, большее числа 3.*

Нам необходим также следующий результат (см., например, [4]).

Теорема А [4]. *Неразрешимая конечная группа с абелевой 2-силовской подгруппой изоморфна либо $PSL(2, p^n)$, либо группе Янко, либо группе Ри.*

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, имеющая C-сепарирующие подгруппы. Тогда либо в G найдется дополняемая C-сепарирующая подгруппа, либо в G существует единственная, недополняемая C-сепарирующая подгруппа, причем ее индекс в G простое число.*

Доказательство. Пусть в группе G существует более одной C-сепарирующей подгруппы. Рассмотрим две различные C-сепарирующие подгруппы M и N. Легко заметить, что $(M \cap N)$ — C-сепарирующая подгруппа группы G, и либо $(M \cap N) \subset M$, либо $(M \cap N) \subset N$. Поэтому, либо M, либо N дополняема во всей группе G, что и требовалось доказать.

Пусть теперь в группе G существует единственная C-сепарирующая подгруппа M. Если она дополняема в G, то все доказано. Пусть M недополняема в G. Легко заметить, что $M \lhd G$. А поэтому $|G : M|$ — простое число, иначе бы в G существовала еще одна C-сепарирующая подгруппа. Лемма доказана.

Отметим следующие два очевидных факта.

1. Пересечение любого множества C-сепарирующих подгрупп является C-сепарирующей подгруппой.

2. $C(G) \lhd G$, где $C(G)$ — пересечение всех C-сепарирующих подгрупп группы G.

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа, имеющая C-сепарирующие подгруппы и $N \lhd G$. Если $N \not\subset C(G)$, то $C(G/N) = E$, т. е. G/N — вполне факторизуемая группа.*

Доказательство. Пусть $\overline{K} \subset \overline{G} = G/N$. Обозначим через K прообраз подгруппы $\overline{K}$ в группе G. Очевидно, $K \supseteq N$, а значит, $C(G) \not\supset K$, откуда $G = KD$ и $K \cap D = E$. Поэтому $\overline{G} = \overline{KD}$ и $\overline{K} \cap \overline{D} = \overline{E}$. Следовательно, группа $\overline{G}$ вполне факторизуема. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа, имеющая C-сепарирующие подгруппы и $N \lhd G$. Если $N \subset C(G)$, то G/N — группа, имеющая C-сепарирующие подгруппы.*

Доказательство. Пусть $\overline{G} = G/N$, $\overline{K} \subset \overline{G}$ и $\overline{K} \not\subset \overline{C(G)}$. Тогда $K \not\subset C(G)$, а значит $G = KL$, где $K \cap L = E$. Следовательно, $\overline{G} = \overline{KL}$ и

$K \cap \overline{L} = \overline{E}$. В силу произвольности выбора подгруппы K получаем, что $\overline{C(G)}$ — C-сепарирующая подгруппа группы $\overline{G}$. Лемма доказана.

Из лемм 2, 3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Произвольный гомоморфный образ конечной группы, имеющей C-сепарирующие подгруппы, является группой, имеющей C-сепарирующие подгруппы.*

Лемма 4. *Пусть* $G = (G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_p)\langle x\rangle$, *где* $G_i^x = G_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, $G_p^x = G_1$ *и* $x^p \in (G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_p)$, $p > 1$. *Тогда в подгруппе* $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_p$ *найдется элемент* f *такой, что* $G = (G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_p) \rtimes \langle xf\rangle$.

Доказательство. Если $x^p = 1$, то все доказано. Пусть $x^p \neq 1$. Тогда $x^p = g_1 g_2 \ldots g_p$, где $g_i \in G_i$. Поскольку $x x^p x^{-1} = x^p$, то $g_1^x g_2^x \ldots g_p^x = g_1 g_2 \ldots g_p$, откуда $g_2^{-1} g_1^x = (g_1 g_p^{-x})(g_3 g_2^{-x}) \ldots (g_p g_{p-1}^{-x})$, а следовательно, $g_1^x = g_2$, $g_2^x = g_3, \ldots, g_{p-1}^x = g_p$, $g_p^x = g_1$. Рассмотрим теперь элемент $g_1^{-1}x$. Его p-я степень равна $g_1^{-1} x g_1^{-1} x \ldots g_1^{-1} x = g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_p^{-1} x^p = g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_p^{-1} g_1 g_2 \ldots g_p = 1$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $G = PSL(2, p^n)\langle x\rangle$, *где* $PSL(2, p^n) \lhd G$, $x^q \in PSL(2, p^n)$, q — *простое число. Если* $p = 2$, *или* $p > 2$ *и* n *нечетное, то в* $PSL(2, p^n)$ *существует такой элемент* y, *что* $G = PSL(2, p^n) \rtimes \langle yx\rangle$.

Доказательство. Если $x^q = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $x^q \neq 1$. Так как в группе $PSL(2, p^n)$ нет центра, то отображение $g \to x^{-1}gx$, $g \in PSL(2, p^n)$ является внешним автоморфизмом этой группы. Если $p = 2$, то x можно представить в виде af, где $a \in PSL(2, p^n)$, а f — автоморфизм, связанный с основным полем. Так как $x^2 \in PSL(2, p^n)$, то $f^2 = 1$ и $(a^{-1}x)^q = 1$.

Пусть теперь $p > 2$. Если $q = 2$, то из нечетности n следует, что x представим в виде $x = ad$, где $a \in PSL(2, p^n)$, а d — диагональный автоморфизм. Пусть он индуцируется сопряжением с помощью матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Положим $b = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$; сопряжение с помощью матрицы b есть внутренний автоморфизм группы $PSL(2, p^n)$. Тогда

$$(bd)^2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta\lambda \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Поэтому элемент $(bd)^2$ индуцирует тождественный автоморфизм группы $PSL(2, p^n)$, т. е. $(bd)^2 = 1$. Отсюда $(ba^{-1}x)^2 = (bd)^2 = 1$.

Пусть теперь $p > 2$, $q > 2$, $x^q \in PSL(2, p^n)$. Тогда x можно представить в виде $x = adf$, где $a \in PSL(2, p^n)$, d — диагональный автоморфизм, $d^2 \in PSL(2, p^n)$, f — автоморфизм, связанный с полем. Тогда $f^q = 1$, и потому $n = qr$. Если α — произвольный элемент основного поля, то $f(\alpha) = \alpha^{p^r}$. Из включения $(adf)^q \in PSL(2, p^n)$ следует, что $(df)^q \in PSL(2, p^n)$. Поскольку

$$(df)^q = dfdf \ldots df = dd^{p^r} d^{2p^r} \ldots d^{(q-1)p^r} f^q = d^{1+p^r+p^{2r}+\ldots+p^{(q-1)r}},$$

то

$$d^{1+p^r+p^{2r}+\ldots+p^{(q-1)r}} \in PSL(2, p^n).$$

В силу нечетности числа $1 + p^r + p^{2r} + \ldots + p^{(q-1)r}$ и включения $d^2 \in PSL(2, p^n)$ следует, что $d \in PSL(2, p^n)$. Поэтому $x = bf$, $b \in PSL(2, p^n)$ и $(b^{-1}x)^q = f^q = 1$. Лемма доказана.

2. Примарные конечные группы с дополняемыми C-сепарирующими подгруппами.

Лемма 6. *Пусть* K — *нормальный делитель примарной конечной группы* G. *Если пересечение* $K \cap Z(G)$ *дополняемо в* K, *то* K — *абелева группа, при этом экспонента группы* K *не превышает экспоненту группы* $K \cap Z(G)$.

Доказательство. Поскольку группа $K \cap Z(G)$ дополняема в K, то $K = (K \cap Z(G)) \times D$. Далее коммутант $K' = (K \cap Z(G))' \times D' = D'$. Поскольку $D' \lhd G$ и $D' \cap Z(G) = E$, то $D' = E$, а следовательно, D — абелева группа. Тогда и группа K абелева.

Пусть экспонента подгруппы K превышает экспоненту пересечения $K \cap Z(G)$. Тогда, очевидно, существует натуральное число $l > 0$ такое, что подгруппа $S = \underbrace{\Phi(\Phi(\ldots \Phi}_{l}(K)\ldots)$ лежит в группе D и отлична от единичной подгруппы E. Следовательно, $S \cap Z(G) \neq E$, что противоречит соотношению $D \cap Z(G) = E$. Лемма доказана.

Из последнего утверждения, в частности, следует следущее предложение.

Следствие 2. *Нормальный делитель примарной группы тогда и только тогда является элементарным абелевым, когда его пересечение с центром всей группы — элементарная абелева подгруппа, дополняемая в этом нормальном делителе.*

Лемма 7. *Пусть G — конечная группа, имеющая C-сепарирующие подгруппы. Если $x \notin C(G)$, то $C_G(\langle x \rangle) = \langle x \rangle \times A$, где A — вполне факторизуемая группа.*

Доказательство. Поскольку $x \notin C(G)$, то $G(\langle x \rangle) = \langle x \rangle \times A = (\langle x \rangle \times D) L = (\langle x \rangle \times L) D$, $L \cap D = E$, где D — произвольная подгруппа группы A. Значит, A — вполне факторизуемая группа, что и требовалось доказать.

Лемма 8. *Конечная примарная группа G тогда и только тогда обладает дополняемой C-сепарирующей подгруппой, когда G — группа одного из следующих типов:*

1) *G — элементарная абелева p-подгруппа;*

2) *G — неабелева группа, разложимая в полупрямое произведение элементарной абелевой p-подгруппы и циклической группы простого порядка p.*

Доказательство. Поскольку в G существует дополняемая C-сепарирующая подгруппа, то в G найдется элемент x простого порядка p, не лежащий в $C(G)$. Тогда возможны два случая: $x \in Z(G)$ либо $x \notin Z(G)$.

В первом случае в силу леммы 7 группа G элементарная абелева, а значит, G — группа типа 1.

Во втором случае $G = (\langle x \rangle \times Z(G)) D = (Z(G) \times D) \leftthreetimes \langle x \rangle$. В силу леммы 7 $Z(G)$ — элементарная абелева группа. Поэтому согласно следствию 2 получается элементарная абелевость группы $Z(G) \times D$, т. е. G — группа типа 2. Лемма доказана.

3. Некоторые свойства силовских подгрупп конечной группы, имеющей C-сепарирующие подгруппы. Основной результат предыдущего параграфа дает информацию о строении силовской подгруппы конечной группы G, имеющей дополняемую C-сепарирующую подгруппу, которая не лежит в сепараторе $C(G)$. Следующий результат показывает, что все силовские подгруппы группы, имеющей C-сепарирующие подгруппы, за исключением быть может одной, силовской подгруппы, элементарные абелевы.

Лемма 9. *Пусть G — конечная группа, имеющая C-сепарирующие подгруппы и $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$. Тогда либо*

1) *все силовские p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, подгруппы группы G элементарные абелевы, либо*

2) *силовские p_i, $i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, подгруппы группы G элементарные абелевы, а силовская p_j-подгруппа группы G не элементарная абелева, при этом она не лежит в $C(G)$.*

Доказательство. Если в G существует дополняемая C-сепарирующая подгруппа, то из работы [2] следует истинность леммы.

Остается в силу леммы 1 рассмотреть случай, когда $G = C(G)\langle x \rangle$, где $x^{p^n} = 1$, $n > 1$, $C(G)$ недополняема в G. Легко заметить, что $x^p \in C(G)$. Пусть Q — произвольная силовская подгруппа группы G такая, что $(|Q|, p) = 1$. Очевидно, $Q \subset C(G)$. Тогда в силу теоремы 4.2.4 из [5] $N_G(Q) \not\subset C(G)$. Поэтому существует элемент $y \notin C(G)$ такой, что $(|Q|, |y|) = 1$.

Следовательно, $Q \leftthreetimes \langle y \rangle = (\Phi(Q) \leftthreetimes \langle y \rangle) Q_1$, где $Q = \Phi(Q) \leftthreetimes Q_1$, откуда $\Phi(Q) = E$ и Q — элементарная абелева группа. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $G = C(G) \langle x \rangle$, где $| G : C(G) | = p$. Тогда силовская p-подгруппа группы $C(G)$ дополняема в $C(G)$.*

Доказательство. Пусть F — силовская p-подгруппа группы G, содержащая $\langle x \rangle$. Тогда $F = (F \cap C(G)) \langle x \rangle$ и $L = (F \cap C(G))$ — силовская p-подгруппа группы $C(G)$. Поскольку $F \not\subset C(G)$, то $G = FD$, где $F \cap D = E$. Поэтому $D \subset C(G)$ и, следовательно, $C(G) = DL$, что и требовалось доказать.

4. Основной результат.

Теорема. *Конечная группа, имеющая C-сепарирующие подгруппы, разрешима.*

Доказательство. Если в группе G существует дополняемая C-сепарирующая подгруппа, то из теоремы 6.1 [2] следует ее разрешимость.

В силу леммы 1 осталось рассмотреть случай, когда $G = C(G) \langle x \rangle$, $| G : C(G) | = p$ и $C(G)$ недополняема в G. Пусть G — контрпример минимального порядка к данной теореме. Тогда $C(G)$ — неразрешимая группа. Возможны следующие случаи:

I. $| G : C(G) | = 2$. Здесь силовская 2-подгруппа группы $C(G)$ (обозначим ее через L) дополняема в $C(G)$ (см. лемму 10). При этом, не нарушая общности рассуждений, полагаем $L^x = L$. В силу минимальности группы G $C(G)$ — либо простая группа, либо $C(G) = G_1 \times G_2$ и $G_1^x = G_2$, $G_2^x = G_1$.

Во втором случае в силу леммы 4 $G = C(G) \leftthreetimes \langle y \rangle$, что противоречит недополняемости группы $C(G)$. В первом случае в силу теоремы 4.2 из [3] $C(G) \cong PSL(2, p)$, где p — простое число Мерсена, большее числа 3. Опять в силу леммы 5 получаем дополняемость группы $C(G)$. Пришли к противоречию. Случай I рассмотрен.

II. $| G : C(G) | > 2$. В силу леммы 9 силовская 2-подгруппа группы G является элементарной абелевой и лежит в $C(G)$. Тогда из теоремы A следует, что $C(G) \cong PSL(2, p^n)$, либо $C(G)$ изоморфна группе Янко, либо $C(G)$ изоморфна группе Ри. Поскольку в $C(G)$ существует дополняемая силовская подгруппа, то $C(G)$ естественно не может быть изоморфна группе Янко или группе Ри. Остается рассмотреть случай $C(G) \cong PSL(2, p^n)$.

Так как в $C(G)$ существует дополняемая силовская q-подгруппа, $q > 2$, то в силу результатов из [6] возможны следующие ситуации: 1) $p^n \equiv 3 \pmod 4$; 2) $p = 2$ и $n \geqslant 2$; 3) $p = 11$ и $n = 1$; 4) $p = 7$ и $n = 1$.

Рассмотрим их.

1. $C(G) \cong PSL(2, p^n)$, где $p^n \equiv 3 \pmod 4$. Группа $C(G)$ допускает только одну факторизацию $C(G) = ND$, где $|N| = p^n(p^n - 1)/2$ и $|D| = p^n + 1$. Тогда в силу леммы 10 либо N, либо D является силовской подгруппой группы $C(G)$. Если N — силовская подгруппа группы $C(G)$, то $p^n(p^n - 1)/2 = p^l$, откуда $p^{n-l}(p^n - 1) = 2$, а следовательно, $p^n = 3$. Поэтому $C(G) \cong PSL(2, 3) \cong A_4$ — разрешимая группа. Пришли к противоречию с нашим предположением.

Пусть D — силовская подгруппа группы $C(G)$. Очевидно, D — силовская 2-подгруппа группы $C(G)$. В силу леммы 10 $| G : C(G) | = 2$, что противоречит нашему предположению.

2. $C(G) \cong PSL(2, 2^n)$, где $n \geqslant 2$. В силу леммы 5 группа $C(G)$ дополняема в G, что противоречит нашему предположению.

3. $C(G) \cong PSL(2, 11)$. В группе $C(G)$ дополняема только силовская 11-подгруппа. Тогда в силу леммы 10 $| G : C(G) | = 11$. Если x действует тождественно на сепаратор $C(G)$, то по лемме 7 группа G разрешима, что противоречит нашему предположению. Значит $x \in (\mathrm{Aut}\, G / \mathrm{Inn}(G))$. Но, как известно, порядок группы внешних автоморфизмов группы $PSL(2, 11)$ равен двум. Пришли к противоречию с тем, что $| G : C(G) | = 11$.

4. $C(G) \cong PSL(2, 7)$. В силу леммы 5 получаем дополняемость $C(G)$ в группе G, что противоречит нашему предположению. Случай 4 рассмотрен, а вместе с ним рассмотрен и случай II. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 6—14.

2. *Спиваковский А. В.* Строение конечных групп, имеющих С-сепарирующие подгруппы.— Киев, 1984.— 63 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.13).
3. *Arad Z.*, *Ward M. B.* New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra.— 1982.— **77**, N 1.— P. 234—246.
4. *Гаген Т. М.* Некоторые вопросы теории конечных групп // К теории конечных групп.— М. : Мир, 1979.— С. 13—97.
5. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 288 с.
6. *Ito N.* On the factorizations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$ // Acta sci. math. — 1953. — **15**, N 1.— S. 79—84.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 21.02.85