Пример, приведенный в конце доказательства леммы 4, показывает, что эта оценка достижима при $n = q^t$, $k_q = k$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть Q — поле рациональных чисел, Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа* GL (n, Q). *Тогда* $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta\ (n)\ 2^n$. *Эта оценка достижима при* $n = 2^t$, $t \geqslant 1$.

Доказательство. Очевидно поле Q удовлетворяет условию I, $l_2(Q) = 4$, $ml_q(Q)(Q_q : Q)^{-1} \leqslant 2m$. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \dot{\times} \ldots \dot{\times} \Gamma_k$— представление Γ в виде (9).

Тогда $\Gamma_i : Z(\Gamma_i) \leqslant \beta\ (q_i^{\alpha_i})\ (2m)^{q_i^{\alpha_i}}$ и, следовательно,

$$\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta\left(\frac{n}{m}\right)(2m)^{\frac{n}{m}}.$$

Функция $f(y) = (2y)^{\frac{n}{y}}$, $y \geqslant 1$, достигает максимума в точке $e/2$, причем при $y > e/2$ она убывает. Отсюда в силу того, что $\beta\left(\frac{n}{m}\right) \leqslant \beta(n)$, а $f(1) = f(2)$, следует неравенство $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(n)\, 2^n$. Пример, приведенный в конце доказательства леммы 4, показывает, что эта оценка достижима при $n = 2^k$, $k \geqslant 1$. Теорема доказана.

1. *Супруненко Д. А.* Группы матриц.— М. : Наука, 1972.— 351 с.
2. *Конюх В. С.* Локально нильпотентные линейные группы // Докл. АН БССР.— 1984.— 28, № 3.— С. 197—199.
3. *Конюх В. С.* Неприводимые локально нильпотентные группы.— Минск, 1984.— 34 с.— (Препринт / АН БССР. Ин-т математики; № 10 (185)).
4. *Супруненко Д. А.* О матричных нильпотентных группах // Учен. зап. Белорус. ун-та.— 1953.— Вып. 15.— С. 13.
5. *Закирьянов К. Х.* Об индексе центра неприводимой нильпотентной линейной группы над алгебраически замкнутым полем // Мат. заметки.— 1983.— 34, № 2.— С. 171—178.
6. *Dixon J. D.* The structure of linear groups.— New York, 1971.— 183 p.
7. *Dixon J. D.* Nilpotence and local nilpotence of linear groups // Linear Algebra and Its. Appl.— 1976.— 13, N 112.— P. 59—67.
8. *Супруненко Д. А.* Локально нильпотентные линейные группы над произвольным полем // Мат. сб.— 1965.— 68, № 4.— С. 614—622.
9. *Залесский А. Е.* Сверхразрешимые и нильпотентные подгруппы простых алгебр // Докл. АН БССР.— 1962.— 7, № 12.— С. 800—802.

Украинский математический журнал
1991, том 43, №№ 7,8

Получено 08.01.91

УДК 519.41/47

В. А. КРЕКНИН, И. И. МЕЛЬНИК, А. В. СПИВАКОВСКИЙ,
кандидаты физ.-мат. наук (Херсон. пед. ин-т)

Конечные 2-группы со сверхдополняемой циклической подгруппой

Дано описание конечных 2-групп, для которых некоторая циклическая подгруппа сверхдополняема и имеет инвариантное абелевое дополнение во всей группе.

Дано опис скінченних 2-груп, для яких деяка циклічна підгрупа наддоповнювана, причому вона має інваріантне абелеве доповнення у всій групі.

Подгруппу B группы G будем называть сверхдополняемой в G, если любая подгруппа, содержащая B, имеет в G дополнение. Если группа G содержит сверхдополняемую циклическую подгруппу X, то будем называть G X-факторизуемой группой. Ввиду [4] конечная p-группа ($p > 2$) является X-факторизуемой тогда и только тогда, когда для X существует элементарное абелевое дополнение. Оказалось, что для $p = 2X$-факторизуемые группы имеют довольно сложное строение.

Конечную X-факторизуемую 2-группу G будем называть XA-факторизуемой, если в G существует инвариантное абелевое дополнение к X. Таким образом, всякая XA-факторизуемая 2-группа G имеет вид $G = A \leftthreetimes X$, где A — абелева подгруппа.

В настоящей работе дается описание конечных XA-факторизуемых 2-групп. Основные результаты изложены в теоремах 1—3. Все неопределяемые понятия и обозначения см. в [1, 3].

1. Примеры XA-факторизуемых групп. Всякое полупрямое произведение конечной элементарной группы D на циклическую группу X является XA-факторизуемой группой. В частности, группа диэдра 8-го порядка — XA-факторизуемая группа. Примером X-факторизуемой группы, но не являющейся XA-факторизуемой, служит группа диэдра 16-го порядка. Следующая группа будет играть особую роль в дальнейшем изложении.

Пусть $R = \langle a, x\rangle$ — группа 64-го порядка, заданная определяющими соотношениями $a^4 = x^4 = b^4 = 1$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^2 \cdot b^2$, $[a, b] = 1$. Подгруппа $A = \langle a; b\rangle$ является абелевой и инвариантной в R, причем $R = A \leftthreetimes X$, где $X = \langle x\rangle$. В группе R лишь три подгруппы $M = \langle x, b\rangle$, $N = \langle x, a^2\rangle$ и $L = \langle x, b^2\rangle$ содержат X. Легко видеть, что дополнением к M в группе R является циклическая подгруппа $\langle a^3 \cdot x^2\rangle$; дополнением к N — циклическая подгруппа 4-го порядка $\langle a \cdot x\rangle$ и, наконец, дополнением к подгруппе L в группе R является подгруппа 8-го порядка $\langle a; bx^2\rangle$. Следовательно, подгруппа X — сверхдополняема в группе R.

Покажем теперь, что подгруппа X не имеет в R элементарного дополнения. Допустим, что $R = D \cdot X$, где D — элементарная подгруппа. Так как инволюция x^2 из X не принадлежит центру группы R, то D является инвариантной в R Но тогда коммутант $R' \subset D$. Отсюда вытекает, что $b = [a, x] \in D$. Но так как $o(b) = 4$, то получаем противоречие.

2. Свойства XA-факторизуемых групп. Пусть G — произвольная XA-факторизуемая группа. Выбираем систему образующих в G так, что $G = \langle a_1, \ldots, a_l, x\rangle$, $a_i \in A$ и $X = \langle x\rangle$. Коммутаторы вида $[a, x^k] = [a, x, \ldots, x]$ будем называть простейшими коммутаторами. Если для любого i элемент $[a_i, x]$ является инволюцией, то коммутант G' — элементарная подгруппа.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/G'$ и обозначим через $\overline{g}$ образ элемента $g \in G$ при указанной факторизации. Так как $\overline{G}$ — абелева группа, то $\overline{G} = \overline{A} \times \overline{X}$, причем $\overline{A}$ — элементарная подгруппа. Отсюда получаем $A = \langle a_1, \ldots, a_l\rangle \cdot G'$. Из этого равенства вытекает, что если для каждого i элемент a_i является инволюцией, то A — элементарная подгруппа.

Пусть G — произвольная XA-факторизуемая группа с двумя образующими. Так как $\overline{X}$ — сверхдополняемая подгруппа в $\overline{G}$, то $\overline{A}$ является элементарной подгруппой 2-го порядка. Отсюда вытекает, что G' максимальна в A и $G' \cdot X$ максимальна в G. Следующее очевидное утверждение будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть произвольная конечная 2-группа K представима в виде $K = F \cdot Z$, где Z — циклическая, а F — инвариантная в K. Тогда любая подгруппа M из K, имеющая с F тривиальное пересечение, является циклической, причем $|M| \leqslant |Z|$.*

Пусть $G = A \leftthreetimes X$ — произвольная конечная XA-факторизуемая 2-группа. Допустим, что подгруппа A содержит элемент a 4-го порядка. Рассмотрим дополнение D к подгруппе $\Omega_1(A) \cdot X$ в группе G. Согласно лемме 1 $D = \langle d\rangle$ — циклическая подгруппа. Пусть $d = a \cdot x^\alpha$, где $a \in A$. Тогда $G = \langle a, \Omega_1(A), X\rangle$, причем $o(a) \geqslant 4$, ибо в противном случае A — элементарная подгруппа. С помощью элементов из $\Omega_1(A)$ множество $\{a, x\}$ дополняем до минимальной системы образующих $\{a, u_1, \ldots, u_l, x\}$ группы G.

Такую систему образующих будем называть приведенной системой образующих. Положим $A(l) = \langle a, u_1, \ldots, u_l \rangle$, тогда $A = A(l) \cdot G'$.

Лемма 2. *Пусть $G = \langle a, x \rangle$ — XA-факторизуемая группа с двумя образующими, причем $o(a) \geqslant 4$. Тогда элемент a можно выбрать в A так, что $yay = a^{-1}$, где y — инволюция подгруппы X.*

Доказательство. Рассмотрим факторизацию группы $G = G' \leftthreetimes X \leftthreetimes M$, где $M = \langle u \rangle$ и $u^2 = 1$. Для элемента a получаем равенство $a = ug \cdot x^{\alpha}$, поэтому $u = g \cdot x^{\alpha} \cdot a^{-1}$. Отсюда выводим $1 = u^2 = x^{2\alpha} \cdot a_1$, где $a_1 \in A$. Но тогда $x^{2\alpha} = 1$, т. е. $x^{\alpha} \in \langle y \rangle$. Если $x^{\alpha} = 1$, то $u \in A$ и $G = \langle u, x \rangle$. Но тогда A — элементарная подгруппа, что недопустимо.

Допустим, что $a = ug \cdot y$, тогда $1 = u^2 = ayg^{-1} \cdot ayg^{-1} = ag_1 \cdot y \cdot ag_1 \cdot y$, где $g, g_1 \in G'$. Поэтому, если $t = a \cdot g_1$, то $yty = t^{-1}$, причем $o(t) \geqslant 4$. Действительно, $G = \langle t, x \rangle$, и если бы $t^2 = 1$, то подгруппа A была бы элементарной, что невозможно. Лемма доказана.

Будем предполагать, что G — произвольная XA-факторизуемая группа.

Теорема 1. *Подгруппа A XA-факторизуемой группы G не содержит элементов 8-го порядка.*

Доказательство. Пусть G — минимальный контрпример и пусть $\{a, u_1, \ldots, u_l, x\}$ — приведенная система образующих группы G, причем $o(a) \geqslant 8$ и $l \geqslant 1$. Рассмотрим подгруппу $D = \langle a, x \rangle$ и пусть $F = D \cap A$, тогда $F \lhd G$ и $D = F \leftthreetimes X$. Так как D — XA-факторизуемая группа и $|D| \leqslant |G|$, то получаем противоречие с минимальностью группы G. Поэтому в приведенной системе образующих группы G не должно быть инволюций, т. е. G порождается элементами a и x, причем $o(a) \geqslant 8$. Подгруппа $H = G' \cdot X$ является XA-факторизуемой и $H \neq G$, поэтому $\exp G' \leqslant 4$. А так как $a^2 \in G'$, то получаем $o(a) = 8$ и $\exp G' = 4$.

Докажем, что $o(x) \geqslant 4$. Допустим, что $x^2 = 1$. Тогда по лемме 2 $xax = a^{-1}$, поэтому $T = \langle a \rangle \lhd G$. Отсюда следует, что $G = T \leftthreetimes X$, причем $\Omega_1(T) = \langle a^4 \rangle$. Пусть M — дополнение к подгруппе $\langle a^4 \rangle \cdot X$ в группе G. По лемме 1 M — циклическая подгруппа и $|M| \leqslant |X| \leqslant 2$. А так как $|M| = 4$, то получили противоречие. Следовательно, в минимальном контрпримере $o(x) = 2^m$, $m > 1$.

Для завершения доказательства теоремы необходимо установить следующие вспомогательные утверждения:

а). *Пусть $K = M \leftthreetimes X$ — XA-факторизуемая группа и M — циклическая подгруппа. Если $|M| > 2$, то $|X| = 2$.*

б). *Пусть K — произвольная конечная 2-группа. Если коммутант K' абелев, то верно тождество*

$$[t, z^n] = [t, z]^n \cdot [t, z^{(2)}]^{C_n^2} \cdots [t, z^{(n-1)}]^{C_n^{n-1}} \cdot [t, z^{(n)}].$$

в). *Пусть $K = F \leftthreetimes X$ — произвольная конечная 2-группа и $F \neq \{1\}$ — элементарная, а X — циклическая подгруппы. Тогда ранг F не меньше класса нильпотентности группы K.*

Доказательство а). Допустим, что $M = \langle f \rangle$ и $X = \langle x \rangle$, причем $o(f) = 2^k$, $k > 1$, и $o(x) = 2^m$, $m > 1$. Так как K — XA-факторизуемая группа, то на основании леммы 2 получаем равенство $yfy = f^{-1}$, где y — инволюция из X. С другой стороны, $x^{-1} \cdot f \cdot x = f^{1+2\varepsilon}$ и по индукции получаем равенство $y \cdot f \cdot y = f^r$, где $r = 1 + 2^m \cdot \delta$, $\delta \in N$. Следовательно, $f^{-1} = f^r$, что дает сравнение $-1 \equiv r \pmod{2^k}$, т. е. $2^m \cdot \delta + 2 \equiv 0 \pmod{2^k}$. Если $m \geqslant 2$, то получаем противоречие.

б). Используя тождество для коммутаторов $[t, xy] = [t, y] \cdot [t, x] \times [t, x, y]$, методом математической индукции получаем требуемое равенство.

в). Обозначим через $c(K)$ класс нильпотентности группы K. Пусть $c(K) = 2$, тогда если ранг $F = 1$, то $K = F \times X$ и поэтому $c(K) = 1$, что невозможно. Допустим, что утверждение в) верно для любой группы K с условием $c(K) \leqslant n$. Рассмотрим группу K, для которой $c(K) = n + 1$.

Пусть ее нижний центральный ряд имеет вид $K = K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_{n+1} \supset \supset K_{n+2} = \{1\}$. Фактор-группа $K/K_{n+1} = \overline{F} \leftthreetimes \overline{X}$ имеет класс нильпотентности n. По индукционной посылке ранг $\overline{F} \geqslant n$. А так как $K_{n+1} \subset F$ и $K_{n+1} \neq \{1\}$, то ранг $F \geqslant n + 1$. Утверждение доказано.

Возвратимся теперь к рассмотрению контрпримера $G = \langle a, x \rangle$, где $o(a) = 8$, $o(x) = 2^m$, $m > 1$. Пусть $n = 2^{m-1}$, тогда коммутатор $t = [a, x^{(n)}]^2 \neq 1$. Действительно, на основании леммы 2 $[a, y]^2 = (a^{-1}yay)^2 = a^4 \neq 1$. С другой стороны, согласно утверждению б) получаем равенство

$$[a, y]^2 = [a, x^n]^2 = ([a, x]^2 \cdot [a, x^{(2)}]^{C_n^2} \ldots [a, x^{(n-1)}]^{C_n^{n-1}} \cdot [a, x^{(n)}])^2.$$

Так как $m > 1$, то все показатели коммутаторов в скобках, кроме последнего, четные. А поскольку $\exp G' \leqslant 4$, то при возведении в квадрат все множители, кроме последнего, равны единице, поэтому элемент $t \neq 1$.

Подгруппа $H = G' \cdot X$ порождается элементами $[a, x]$ и x. Тогда класс нильпотентности фактор-группы $\overline{H} = H/\Omega_1(G')$ не меньше числа n. Далее, $\overline{H} = \overline{G'} \leftthreetimes \overline{X}$, где $\overline{G'}$ и $\overline{X}$ — образы подгрупп G' и X при указанной факторизации. Так как $\exp G' \leqslant 4$, то $\overline{G'}$ — элементарная подгруппа, причем $\overline{X}$ изоморфна X. В силу утверждения в) $\operatorname{rang} \overline{G'} \geqslant c(\overline{H}) \geqslant n$, следовательно $|\overline{G'}| \geqslant 2^n$, поэтому $[G : \Omega_1(G')] \geqslant 2^n$. Далее, $A = \langle a \rangle \cdot G'$, $a^2 \in G'$, $o(a) = 8$ и $\exp G' = 4$, поэтому $\Omega_1(A) = \Omega_1(G')$, причем $[A : G'] = 2$. Таким образом, $[A : \Omega_1(A)] \geqslant 2^{n+1} = h$. Обозначим $N = \Omega_1(A) \cdot X$ и пусть M — дополнение к подгруппе N в группе G. Так как $M \cap A = \{1\}$, то по лемме 1 $|M| \leqslant |X|$. С другой стороны, $[G : N] \geqslant h$, поэтому $h \leqslant 2^m$, т. е. $n \leqslant m - 1$, что невозможно для $m > 1$. Таким образом, при условии существования минимального контрпримера, приходим к противоречию. Теорема 1 доказана.

Лемма 3. *Для любой XA-факторизуемой группы $G = A \leftthreetimes X$ подгруппа A представима в виде $A = A(l) \times B$, где $B \subset G'$ и $A(l) = \langle a, u_1, \ldots, u_l \rangle$.*

Доказательство. Так как $A = A(l) \cdot G'$, то достаточно показать, что в G' подгруппа $S = G' \cap A(l)$ имеет дополнение. На основании теоремы 1 $\exp A \leqslant 4$. Если $a^2 = 1$, то подгруппа A является элементарной. Поэтому будем предполагать, что приведенная система образующих группы G имеет вид $\{a, u_1, \ldots, u_l, x\}$, где $o(a) = 4$.

Покажем, что $S = \langle a^2 \rangle$. Пусть $g \in S$, тогда для элемента g рассмотрим разложение $g = a^{\alpha} \cdot u_1^{\alpha_1} \ldots u_l^{\alpha_l}$. Если α — нечетное число, то $G = \langle u_1, \ldots, u_l, x \rangle$, что противоречит выбору системы образующих. Таким образом, α — четное число. Аналогично показывается, что и все другие показатели — четные числа, поэтому $g = a^{\alpha} \in \langle a^2 \rangle$. С другой стороны, $a^2 \in \Phi(A) \subset G'$ и тем самым доказано равенство $S = \langle a^2 \rangle$.

Обозначим через B подгруппу наибольшего порядка из коммутанта G', имеющую с S тривиальное пересечение. Покажем, что $G' = S \times B$. Допустим, что существует элемент g из $G' \setminus S \cdot B$. Если $g^2 = 1$, то подгруппа $M = \langle g \rangle \cdot B$ имеет с S тривиальное пересечение. Действительно, пусть $a^2 = g \cdot b$, где $b \in B$. Тогда $g \in S \cdot B$, что невозможно. Так как $|M| > |B|$, получаем противоречие.

Пусть $o(g) = 4$, тогда по доказанному инволюция $g^2 \in S \cdot B$, поэтому $g^2 = s \cdot b$, где $s \in S$, $b \in B$. Ясно, что $b^2 = 1$. Покажем, что b не является квадратом никакого элемента из G'. Пусть $b = v^2$ и $v \in G'$. Тогда $s = g^2 \cdot v^2$. Если $s = 1$, то подгруппа M имеет тривиальное пересечение с S, и приходим к противоречию. Следовательно, $s = a^2$. В этом случае для группы G имеем систему образующих $\{agv, u_1, \ldots, u_l, x\}$, в которой все элементы, кроме x, являются инволюциями из A, что невозможно. Теперь легко показать, что подгруппа $\langle b \rangle$ выделяется в B прямым множителем: $B = \langle b \rangle \times \langle v_2 \rangle \times \ldots \times \langle v_k \rangle$.

Рассмотрим теперь подгруппу $L = \langle g, v_2, \ldots, v_k \rangle$. Так как $g^2 = a^2 \cdot b$, то $g^2 \notin H = \langle v_2, \ldots, v_k \rangle$, ибо в противном случае $a^2 \in B$. Таким образом,

$\langle g\rangle \cap H = \{1\}$. Допустим, что $\langle v_k\rangle \cap \langle g, v_2, \dots, v_{k-1}\rangle \neq \{1\}$. Тогда существует элемент $v_k^{\alpha} = g^{\gamma}\cdot v_2^{\delta}\dots v_{k-1}^{\beta} \neq 1$. Если $g^{\gamma} = 1$, то получаем противоречие. Поэтому $1 \neq g^{\gamma} \in H$. Отсюда вытекает, что и $g^2 \in H$, что невозможно. Аналогично, для любого $i \in \{2, \dots, k-1\}$ получаем, что подгруппа $\langle v_i\rangle$ имеет тривиальное пересечение с подгруппой, порожденной всеми остальными элементами. Таким образом, $L = \langle g\rangle \times H$, где $o(g) = 4$. Следовательно, $|L| > |B|$.

Допустим, что $a^2 \in L$, тогда $a^2 = g^{\gamma}\cdot v_2^{\delta}\dots v_k^{\beta}$. Ясно, что $\gamma = 2$ и $b \in H$, что по ранее доказанному невозможно. Получим $L \cap S = \{1\}$ и тем самым существование подгруппы L противоречит выбору подгруппы B. Таким образом, доказано равенство $G' = S \times B$, причем подгруппа $A = A(l) \times B$ и $B \subset G'$. Лемма доказана.

3. Строение XA-факторизуемых групп с двумя образующими. Пусть $G = A \leftthreetimes X$ — произвольная XA-факторизуемая группа с двумя образующими $a \in A$ и $x \in X$. Будем предполагать, что $o(a) = 4$, так как в противном случае подгруппа A будет элементарной. На основании леммы 3 имеем равенства $A = \langle a\rangle \times B$ и $G' = \langle a^2\rangle \times B$.

Лемма 4. *Если* $\exp B = 4$, *то* $o(x) = 2^k$, *где* k — *число циклических сомножителей 4-го порядка в прямом разложении подгруппы* A, *причем* $k \leqslant 2$.

Доказательство. Пусть D — дополнение к подгруппе $\Omega_1(A)\cdot X$ в группе G. Тогда порядок D равен 2^k. Согласно лемме 1 подгруппа D является циклической, причем $2^k = |D| \leqslant |X| = 2^m$. Допустим, что $|D| < |X|$, $D = \langle u\rangle$ и пусть $u = a_1\cdot x^{\alpha}$, где $a_1 \in A$. Так как $o(u) = o(x^{\alpha})$, то пусть $\alpha = r\cdot 2^{m-k}$, где r — нечетное число. Учитывая включение $\Omega_1(A) \subset G'$, получаем представление $G = \langle a_1, x^r\rangle$. Следовательно, не теряя общности, можно предполагать, что $u = a\cdot x^{\alpha}$, где $\alpha = 2^{m-k}$, $m > k$. Обозначим $b = [a, x]$, $z = x^{\alpha}$. Если $b^2 = 1$, то и коммутант G' является элементарной подгруппой. Так как $B \subset G'$, то получаем противоречие. Таким образом, $o(b) = 4$.

Рассмотрим подгруппу $H = G'\cdot X = \langle b, x\rangle$. Так как H — XA-факторизуемая группа, то по лемме 3 $H' = \langle b^2\rangle \times B_1$ и $G' = \langle b\rangle \times L$. А так как $b^2 = [a^2, x] \neq a^2$, то $L = \langle a^2\rangle \times B_1$, где $B_1 \subset B$. С другой стороны, $H' = [G', X]$, так как G' и X — абелевые подгруппы. Далее, $G_3 = [G', G] = [G', X] = H'$. Таким образом, $G_3 = \langle a^2\rangle \times \langle b^2\rangle \times B_1$, причем $b \notin G_3$. Отсюда вытекает, что $\Omega_1(A) \subset G_3$. Элемент b представим в виде $b = u^{\gamma} \times v \times x^{\delta}$, где v — инволюция из A. Если γ — нечетное число, то $G = H$, что невозможно. Таким образом, $\gamma = 2\cdot t$. Далее, $[a, z^{-1}] \in G_3$ и $u = a\cdot z$, поэтому $u^2 \equiv z^2 \pmod{G_3}$, тогда $b \equiv z^{2t}\cdot x^{\delta} \pmod{G_3}$. Учитывая, что $G_3 \subset A$ и $b \in A$, имеем $z^{2t}\cdot x^{\delta} \in A \cap X = \{1\}$, т. е. $b \equiv 1 \pmod{G_3}$ или $b \in G_3$. Получили противоречие. Поэтому $o(x) = 2^k$

Допустим, что $k \geqslant 3$. Подгруппа $G'\cdot X$ порождается элементами b и x, где $b = [a, x]$, причем $o(b) = 4$ и $G = \langle a, x\rangle$. Так как $G' = \langle a^2\rangle \times B$, то группа G' содержит $k-1$ прямых циклических множителей 4-го порядка. Поэтому $o(x) = 2^{k-1}$, т. е. пришли к противоречию. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь группу 64-го порядка R, определение которой дано в п. 1. Там же показано, что R является XA-факторизуемой группой.

Теорема 2. *Пусть* G — *конечная* XA-*факторизуемая* 2-*группа с двумя образующими. Тогда* G *изоморфна* R *или для подгруппы* X *имеется в* G *элементарное инвариантное дополнение.*

Доказательство. Полагаем $G = A \leftthreetimes X = \langle a, x\rangle$, где $a \in A$ и $X = \langle x\rangle$. Если $a^2 = 1$, то A — элементарная подгруппа, и теорема доказана. Допустим, что $o(a) = 4$. Рассмотрим случай, когда число циклических множителей 4-го порядка в прямом разложении подгруппы A равно 2. Тогда $o(b) = 4$ и получаем разложение $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle \times D$, где D — элементарная подгруппа. Согласно лемме 4 $o(x) = 4$. Пусть $y = x^2$, тогда на основании леммы 2 $yay = a^{-1}$ и поэтому $[a, x, x] = a^2\cdot b^2$. Покажем, что $G' \subset \langle a\rangle \times \langle b\rangle = L$. Коммутант G' порождается всеми своими простейшими коммутаторами. Имеем b, $[b, x] \in L$. Допустим, что $[b, x^{(n)}] \in L$. Тогда $[b,$

$x^{(n+1)}] = [b, x^{(n)}, x] = [a^{2\varepsilon} \cdot b^{2\delta}, x] = b^{2\varepsilon} \cdot [b, x]^{2\delta} \in L$ и включение доказано. Далее, $A = \langle a \rangle \cdot G' \subset L$, т. е. $A = L$ и $D = \{1\}$. Получим $G = L \leftthreetimes X$, где $|G| = 64$, причем образующие a и x удовлетворяют соотношениям $a^4 = b^4 = x^4 = 1$, $[a, b] = 1$, $[b, x] = a^2 \cdot b^2$ и $b = [a, x]$, т. е. группа G изоморфна группе R.

Допустим теперь, что $k = 1$. Тогда $A = \langle a \rangle \times B$, причем B — элементарная подгруппа. Индукцией по n проверяется равенство $[a, x^{(n)}, y] = 1$. Отсюда вытекает, что коммутант G' содержится в централизаторе элемента y. Рассмотрим подгруппу $T = \langle a \cdot y \rangle \cdot G'$. Так как $(ay)^2 = 1$, то T — элементарная подгруппа. Далее, $T \lhd G$, $G = T \cdot X$, причем $T \cap X = \{1\}$. Действительно, пусть инволюция $y \in T$. Тогда $y = a \cdot y \cdot g$, где $g \in G'$. Поэтому $a = g$ и $a^2 = 1$, что невозможно. На основании установленного вытекает, что подгруппа T является инвариантным абелевым дополнением к подгруппе X. Теорема доказана.

4. Описание произвольных конечных XA-факторизуемых 2-групп. Пусть $G = A \leftthreetimes X$ — произвольная XA-факторизуемая группа и $\{a, u_1, \ldots, u_l, x\}$ — ее приведенная система образующих, причем $o(a) = 4$. Согласно установленному ранее $A = A(l) \times B$ и $G' = \langle a^2 \rangle \times B$, причем подгруппа $A(l)$ порождается элементами $a, u_1, \ldots, u_l$.

Рассмотрим подгруппы $H = \langle a, x \rangle$, $K = \langle u_1, \ldots, u_l, x \rangle$, $F = H \cap A$ и $S = K \cap A$. Ясно, что $F, S \lhd G$, причем $H = F \leftthreetimes X$ и $K = S \leftthreetimes X$, Подгруппа $A = F \times T$, где T — элементарная подгруппа. Действительно, S — элементарная подгруппа, причем $A = F \cdot S$. Если T — дополнение к $F \cap S$ в подгруппе S, то тогда T является дополнением к подгруппе F в группе A.

Лемма 5. *Если подгруппа F содержит не менее 2-х прямых циклических сомножителей 4-го порядка, то $A = F \times W$, W содержится в централизаторе элемента y.*

Доказательство. Пусть C — централизатор элемента x в подгруппе A. Достаточно показать, что C — элементарная подгруппа и $A = F \cdot C$. Допустим, что в C существует элемент 4-го порядка z. Рассмотрим дополнение D к подгруппе $N = \langle z^2 \rangle \times X$ в группе $P = \langle z \rangle \cdot X$. Ясно, что $D = \langle d \rangle$ и $d^2 = 1$. Из разложения $P = N \cdot D$ получаем $z = z^{2\gamma} \cdot x^{\delta} \cdot d^{\alpha}$. Отсюда $1 = d^{2\alpha} = x^{2\delta} \cdot z^2$, т. е. $x^{2\delta} = z^2 = 1$, что противоречит условию. Таким образом, z — инволюция. Допустим, что для группы G параметр $l = 1$, т. е. $G = \langle a, u_1, x \rangle$. Тогда $G \neq H$ и $T \neq \{1\}$. Через V обозначим максимальную подгруппу в $K = \langle u_1, x \rangle$, не содержащую элемент u_1. Тогда подгруппа $U = V \cap S$ является максимальной в S, причем $U \lhd G$. Подгруппа $M = \Omega_1(F) \cdot U$ инвариантна в G и $\Phi(A) \subset M$. Рассмотрим дополнение L к подгруппе $M \cdot X$ в группе G. Непосредственно проверяется, что $M \cdot u_1 \cap L \neq \{1\}$ и $M \cdot \{x, x^{-1}\} \cdot a \cap L \neq \{1\}$. Найдутся элементы $v, n \in L$ такие, что $v = m_1 \cdot u_1$ и $n = x \cdot m_2 \cdot a$ или $n = x^{-1} \cdot m_2 a$, где $m_1, m_2 \in M$. Если $n = x \times m_2 \cdot a$, то $[v, n] = [v, x] = [m_1, x] \cdot [u_1, x] \in M \cap L = \{1\}$. Поэтому $[a, x] = 1$, т. е. $v \in Z(G)$. Группа G порождается элементами a, v и x, поэтому $G = H \times \langle v \rangle = (F \leftthreetimes X) \times \langle v \rangle = (F \times \langle v \rangle) \leftthreetimes X$, причем $A = F \times \langle v \rangle$ и $v \in C$.

Рассмотрим теперь произвольную XA-факторизуемую группу G и определим для нее подгруппы $H_i = \langle a, u_i, x \rangle$, $i = 1, \ldots, l$. По доказанному, для каждой группы H_i имеем разложение $H_i = A_i \leftthreetimes X$, где $A_i = H_i \cap A$, причем $A_i = F \cdot C_i$, где C_i — централизатор X в подгруппе A_i. Ясно, что $G = (A_1 \ldots A_l) \leftthreetimes X$, поэтому $A = A_1 \cdot A_2 \ldots A_l$. Но тогда $A \subset F \cdot C$, т. е. $A = F \cdot C$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если подгруппа F содержит только один прямой циклический множитель 4-го порядка, то $\Omega_1(A)$ содержится в централизаторе $C(y)$ элемента y.*

Доказательство. Так как $b = [a, x] \in F$ и $a^2 \neq b^2$, причем $\exp F = 4$, то $b^2 = 1$. Отсюда вытекает, что любой простейший коммутатор является инволюцией. А так как коммутант G' порождается всеми простейшими коммутаторами, то он является элементарной подгруппой. Заметим, что $\Phi(A) = \langle a^2 \rangle$ и поэтому элемент a^2 принадлежит центру $Z(G)$ группы G.

Подгруппа $H = F \rightthreetimes X$ является XA-факторизуемой группой с двумя образующими, поэтому для X существует элементарное дополнение D в H. Но тогда $F \subset D \cdot \langle y \rangle$, откуда следует, что $ay \in D$. Поэтому $(ay)^2 = 1$, т. е. $ay = ya^{-1}$.

Рассмотрим подгруппу $H_1 = \langle a, u_1, x \rangle$. Как и при доказательстве леммы 5, определяем подгруппы M и L. Непосредственно проверяется, что $My \cdot a \cap L \neq \{1\}$ и $M \cdot u_1 \cap L \neq \{1\}$. Пусть $v_1 = m_1 \cdot u_1$ и $n = y \cdot m_2 \cdot a$. Тогда имеем равенства $[n, v_1] = [y, v_1] = [y, m_1] \cdot [y, u_1] \in L \cap M = \{1\}$, т. е. $v_1 \in C(y)$. Подгруппа H_1 порождается элементами a, v_1 и x, причем $a^2, v_1 \in C(y)$. Покажем, что $H_1' \subset C(y)$. Так как коммутант H_1' порождается всеми своими простейшими коммутаторами, то достаточно показать, что $[a, x] \in C(y)$. Имеем $[a, x] \cdot y = y \cdot [a^{-1}, x] = y \cdot [a, x]$. Аналогично, рассматривая подгруппы $H_i = \langle a, u_i, x \rangle$, строим элементы v_i такие, что $H_i = \langle a, v_i, x \rangle$ и $v_i \in C(y)$, причем $H_i' \subset C(y)$. Получаем $G = \langle a, v_1, \ldots, v_l, x \rangle$ и $A = A_1 \cdot A_2 \ldots A_l$, где $A_i = \langle a, v_i \rangle \cdot H_i'$. Каждая подгруппа A_i представима в виде $A_i = \langle a; v_i \rangle \cdot B_i$, где $B_i \subset H_i'$. Но тогда $A = \langle a, v_1, \ldots, v_l \rangle \cdot B_1 \cdot B_2 \ldots \ldots B_l$. Так как произведение $P = B_1 \cdot B_2 \ldots B_l$ — элементарная подгруппа, то существует такая подгруппа $B \subset P$, что $A = \langle a, v_1, \ldots, v_l \rangle \times B$, где $B \subset C(y)$; далее, $\Omega_1(A) = \langle a^2, v_1, \ldots, v_l \rangle \times B \subset C(y)$. Лемма доказана.

Полное описание произвольных XA-факторизуемых 2-групп дает следующая теорема.

Теорема 3. *Конечная 2-группа G является XA-факторизуемой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *$G = D \rightthreetimes Z$, где D — элементарная, а Z — циклическая подгруппы;*
2) *$G = R$ — XA-факторизуемая группа 64-го порядка;*
3) *$G = R \times D$, где D — элементарная подгруппа.*

Доказательство. Пусть $G = A \rightthreetimes X$ — произвольная XA-факторизуемая конечная 2-группа и $\{a, u_1, \ldots, u_l, x\}$ — ее приведенная система образующих. Подгруппа $A = F \times T$, где T — элементарная подгруппа, и $H = F \rightthreetimes X = \langle a, x \rangle$ — XA-факторизуемая группа с двумя образующими. На основании леммы 4 число h прямых циклических сомножителей 4-го порядка не превышает 2. Допустим, что $h = 1$, тогда по лемме 6 $\Omega_1(A) \subset C(y)$. Следовательно, $A = \langle a \rangle \times W$, где W — элементарная подгруппа из $C(y)$. Рассмотрим подгруппу $D = \langle ay \rangle \times \langle a^2 \rangle \times W$. Ясно, что D — элементарная подгруппа, имеющая с X тривиальное пересечение. Подгруппа $L = \Omega_1(A) \cdot X$ является максимальной в G, поэтому она содержит коммутант G'. Но так как $G' \subset A$ и $\Omega_1(A) = A \cap L$, то $G' \subset \Omega(A) \subset D$, поэтому $D \lhd G$. Учитывая, что $\langle a^2 \rangle \cdot W \subset C(y)$, получаем коммутативность подгруппы D. А так как $|D| = |A|$, то $G = D \rightthreetimes X$.

Допустим теперь, что $h = 2$. На основании леммы 5 подгруппа $A = F \times W$, где W содержится в центре группы G. Так как подгруппа $H = F \rightthreetimes X$ — XA-факторизуемая группа с двумя образующими, причем F содержит два прямых циклических множителя 4-го порядка, то на основании теоремы 2 $H = R$. Далее, $F \lhd G$, поэтому $G = (F \times W) \rightthreetimes X = (F \rightthreetimes X) \times W = R \times W$ и тем самым необходимость доказана.

Пусть теперь группа G принадлежит одному из указанных типов. Докажем, что она является XA-факторизуемой группой. Если $G = D \rightthreetimes Z$ и D — элементарная подгруппа, то подгруппа Z является сверхдополняемой и поэтому группа G является XA-факторизуемой. Далее, из описания группы R следует, что она является XA-факторизуемой группой.

Допустим теперь, что $G = R \times H$, где H — элементарная подгруппа. Рассмотрим произвольную подгруппу D из G, которая содержит подгруппу X из R. Если $G = R \cdot D$, то для подгруппы $R \cap D$ существует дополнение T в группе R. Но тогда $T \cdot D = T \cdot (R \cap D) \cdot D = R \cdot D = G$, причем $T \cap D = \{1\}$. Пусть $G \neq R \cdot D$. В этом случае рассмотрим подгруппу $H_1 = R \cdot D \cap H$ и пусть H_2 — дополнение к H_1 в подгруппе H. Обозначим через T_2 дополнение к подгруппе $T_1 = R \cap D$ в подгруппе R. Докажем, что $T_2 \cdot H_2$ является дополнением к подгруппе D в группе G. Имеем $T_2 \cdot H_2 \cdot D = T_2 \cdot T_1 \cdot D \cdot H_2 = R \cdot D \cdot H_2 = R \cdot D \cdot H_1 \cdot H_2 = R \cdot D \cdot H = G$. С другой стороны, пусть $z \in T_2 \cdot H_2 \cap D$, тогда $z = t \cdot h = d$, где $t \in T_2$, $h \in H_2$ и $d \in D$.

Отсюда вытекает, что элемент $h = t^{-1} \cdot d \in H_2 \cap R \cdot D \subset H \cap R \cdot D = H_1$, поэтому $h = 1$ и $t = d$. Следовательно, $z \in T_2 \cap D \subset R \cap D = T_1$, поэтому $z = 1$. Таким образом, $T_2 \cdot H_2 \cap D = \{1\}$, т. е. $T_2 \cdot H_2$ — дополнение к подгруппе D в группе G. Теорема доказана.

1. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.—М.: Наука, 1980.— 384 с.
3. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1987.— 208 с.
4. *Крекнин В. А., Спиваковский А. В.* Конечные p-группы с матрешками дополняемых подгрупп // X Всесоюзн. симп. по теории групп: Тез. докл.— Минск, 1986.— С. 128.
5. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I.— Berlin etc.: Springer, 1967.— 793 S.

Получено 11.12.90

УДК 512.542

Н. Ф. КУЗЕННЫЙ, канд. физ.-мат. наук (НПО «Горсистемотехника», Киев),
С. С. ЛЕВИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Киев. пед. ин-т)

Конечные группы Шмидта и их обобщения

Рассматриваются наиболее непосредственные обобщения конечных групп Шмидта — конечных ненильпотентных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны. В качестве следствий доказываются утверждения, подтверждающие зависимость строения всей группы от наличия в ней той или иной системы подгрупп Шмидта. В частности, доказано, что конечная группа дисперсивна, если в ней все подгруппы Шмидта сверхразрешимы.

Розглядаються найбільш безпосередні узагальнення скінченних груп Шмідта — скінченних нenільпотентних груп, всі власні підгрупи яких нільпотентні. Як наслідки доводяться твердження, які підтверджують залежність будови всієї групи від наявності в ній тієї чи іншої системи підгруп Шмідта. Зокрема, доведено, що скінченна група дисперсивна, якщо в ній всі підгрупи Шмідта надрозв'язні.

1. Введение. В 1924 г. О. Ю. Шмидт опубликовал работу [1], в которой ввел в рассмотрение и изучал класс конечных ненильпотентных групп, в которых всякая собственная подгруппа нильпотентна. Впоследствии эти группы получили название групп Шмидта, или конечных минимальных ненильпотентных групп, или S-групп, и изучением их строения занимались многие авторы (см., например, библиографию в работе Л. А. Шеметкова [2]). Наиболее полно результаты о группах Шмидта изложены в работах Л. Редеи [3, 4] и Ю. А. Гольфанда [5]. Трудно переоценить значение работы [1]. Здесь особо следует отметить следующий факт: любая конечная ненильпотентная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта. Поэтому свойства самой группы существенно зависят от наличия той или иной системы шмидтовских подгрупп.

Обширное направление в теории конечных групп составляют исследования, посвященные различным обобщениям групп Шмидта (см., например, библиографию в работе [2]). Этому направлению принадлежит и настоящая работа. В п. 2 приводятся известные результаты о группах Шмидта и их обобщениях. В п. 3 рассмотрены различные свойства S^*-, S^{**}-групп, обобщающих группы Шмидта.

S^* (S^{**}-)-группой называется конечная ненильпотентная группа, в которой всякая подгруппа непримарного индекса является нильпотентной (нильпотентной или группой Шмидта). Если в определении S^* (S^{**}-)-группы условие нильпотентности заменить на условие абелевости, цикличности, то получим M^* (M^{**}-)-, C^*(C^{**}-)-группы соответственно [6]. В п. 3 указаны некоторые свойства и таких групп. Некоторые важные следствия приведены в п. 4 настоящей работы.