УДК 517.432

О.В.Співаковський (Херсон. держ. пед. ун-т, Україна)

ЗВЕДЕННЯ МАТРИЦІ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА ДО ЖОРДАНОВОЇ ФОРМИ

Значна частина задач чисельного інтегрування диференціальних рівнянь з межовими умовами зводиться до системи лінійних рівнянь, яка повинна бути розв'язана, по можливості, найбільш оптимальним способом. Найбільш зручні для цього матриці стрічкового типу, або такі, що зводяться до них. В даній роботі розглядаються жорданові матриці лінійних операторів та методи їх побудови. Застосування цих матриць значно полегшує обчислювальний процес при розв'язуванні систем лінійних рівнянь.

Основним і найбільш ефективним методом розв'язування задач лінійної алгебри є метод Гауса виключення змінних. В матричному варіанті цей метод полягає у зведенні даної матриці до ступінчатого або діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень. В свою чергу, кожне елементарне перетворення реалізується шляхом множення матриці зліва або справа на елементарні матриці. Таким способом, як правило, розв'язуються системи лінійних рівнянь, обчислюються визначники і ранги матриць, знаходяться обернені матриці. В традиційному викладенні курсу лінійної алгебри суттєву роль грає поняття визначника, яке вводиться за допомогою підстановок.

В цій роботі визначник розглядається як добуток діагональних елементів діагональної матриці, яку можна отримати з даної матриці за допомогою елементарних перетворень [1].

Приступимо до побудови найбільш простої форми матриці лінійного оператора φ, який діє у векторному просторі U над полем F. Припустимо, що всі корені характеристичного рівняння лінійного оператора φ належать полю F.

Теорема 1 (Гамільтона-Келі).

Якщо $f(x)$ – характеристичний многочлен лінійного оператора φ, то $f(\varphi)=0$.

Оскільки всі корені $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ характеристичного многочлена лінійного оператора φ належать полю F, то

$$f(x)=(x-\lambda_1)^{S_1}(x-\lambda_2)^{S_2}...(x-\lambda_k)^{S_k}, \quad \sum_{i=1}^{k} s_i = n.$$

Означення 1.

Нехай λ_0 – корінь характеристичного многочлена $f(x)$ лінійного оператора φ, $\lambda_0 \in F$. Кореневим підпростором лінійного оператора φ, що відповідає кореню λ_0, називається множина V всіх векторів $\bar{a} \in U$ таких, що

$$(\varphi - \lambda_0)^k (\bar{a}) = \bar{0}$$

для деякого натурального числа k.

Лема 1.

Якщо φ – лінійний оператор, що діє в просторі U, і $h(x)$ – довільний многочлен, то $\mathrm{Im}(h(\varphi))$ є φ-інваріантним підпростором простору U.

Доведення:

Нехай $\bar{u} \in \mathrm{Im}(h(\varphi))$; тоді $\bar{u} = h(\varphi)(\bar{v})$, $\bar{v} \in U$. Тому $\varphi(\bar{u}) = \varphi(h(\varphi)(\bar{v})) =$ $= h(\varphi)\varphi(\bar{v}) \in \mathrm{Im}\,\varphi$ $(\bar{v})$, що і потрібно було довести.

Лема 2.

Кореневі підпростори лінійного оператора φ є φ-інваріантними підпросторами.

Доведення:

Нехай V – кореневий підпростір лінійного оператора φ, відповідного кореню λ_0 характеристичного многочлена $f(x)$ оператора φ. Якщо $\bar{u} \in V$, то $(\varphi - \lambda_0 E)^m(\varphi(\bar{u}))=\varphi((\varphi - \lambda_0 E)^m\ (\bar{u}))=\bar{0}$, тобто $\varphi(\bar{v}) \in V$, що і потрібно було довести.

Неважко довести, що множина V є підпростором векторного простору U, це оправдовує термін кореневий підпростір.

За допомогою лем 1 і 2 можна довести наступне твердження.

Теорема 2.

Векторний простір U над полем F, в якому діє лінійний оператор φ, розкладається на пряму суму кореневих підпросторів оператора φ.

Якщо за базис простору U взяти об'єднання базисів кореневих підпросторів, то матриця оператора φ у вказаному базисі буде мати клітинний вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix},$$

де A_i – матриця обмеження оператора φ на кореневому підпросторі, відповідному кореню λ_i (i=1,2,..., k). Тому задача знаходження базису, в якому матриця лінійного оператора φ мала б простіший вигляд, зводиться до аналогічної задачі для кореневих підпросторів.

Отже, нехай U – простір, φ – лінійний оператор, який діє в просторі U, причому характеристичний многочлен $f(x)=(x-\lambda)^n$.

Розглянемо спочатку випадок, коли в просторі U існує такий вектор $\bar{u}$, що $(\varphi - \bar{u}e)^{n-1}(\bar{u}) \neq \bar{0}$. Нехай $\bar{u}_0 = \bar{u}$, $\bar{u}_i = (\varphi - \lambda e)^i(\bar{u}_0)$, i=1,2,...,n-1. Покажемо, що $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$ – базис простору U. Для цього достатньо встановити лінійну незалежність вказаної системи векторів. Нехай $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \bar{u}_i = \bar{0}$. В силу теореми Гамільтона-Келі $(\varphi - \lambda e)^n(\bar{u}_0) = \bar{0}$. Тому при i>0 $(\varphi - \lambda e)^{n-1}(\bar{u}_i) = (\varphi - \lambda e)^{n+i-1}(\bar{u}_0) =$ $= \bar{0}$. З іншого боку $(\varphi - \lambda e)^{n-1}(\bar{u}_0) = \bar{u}_{n-1} \neq \bar{0}$ за умовою. Звідси $(\varphi - \lambda e)^{n-1} \times$ $\times (\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{iu} \bar{u}_i) = \alpha_0 \bar{u}_{n-1} = \bar{0}$; тому $\alpha_0 = 0$. Отже, $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{iu} \bar{u}_i = \bar{0}$; застосовуючи до цього співвідношення оператор $(\varphi - \lambda e)^{n-2}$, отримаємо, що $\alpha_1 = 0$. Повторюючи вказаний процес, матимемо: $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} = 0$. Отже, $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$ – базис простору U. В цьому базисі матриця оператора φ має такий вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Матриця вказаного виду називається *жордановою клітиною*. Якщо U – кореневий підпростір оператора φ, то в загальному випадку матриця φ в деякому базисі має вид

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix},$$

де B_i – жорданова клітка i=1,2,...,k. Вказана матриця називається *жордановою*.

Справедлива теорема .

Теорема 3.

Нехай φ – лінійний оператор, що діє в просторі U над полем F, причому всі корені характеристичного многочлена оператора φ належать F. Тоді матриця оператора φ у відповідному базисі простору U є жордановою.

Для практичного знаходження жорданової матриці лінійного оператора φ можна діяти за наступною схемою. Позначимо через d_i дефект лінійного оператора $(\varphi - \lambda_0 e)^i$, де λ_0 – дане власне значення оператора φ. Для знаходження дефекту лінійного оператора потрібно від розмірності простору U відняти ранг оператора, тобто ранг матриці цього оператора в довільному базисі.

Тоді d_1 – загальне число жорданових клітин, які відповідають власному значенню λ_0; (d_2-d_1) – число клітин розмірності більше ніж 1, (d_i-d_{i-1}) – число клітин розмірності більше ніж i-1. Так як простір U має скінченну розмірність, то для деякого k, $d_k = d_{k+1}$. Отже, жорданові клітини, що відповідають власному значенню λ_0, мають максимальну розмірність k.

Клітин такої розмірності маємо (d_k-d_{k-1}) штук. Клітин розмірності (k-1) буде (d_{k-1}-d_{k-2})-(d_k-d_{k-1}) штук і т.д.

Щоб обгрунтувати цю схему зазначимо, що коли A є жордановою клітиною розмірності k, то $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, \dots, d_k = k$, $d_{k+1} = d_k$, тому $d_1 = 1$ – кількість клітин, $d_{k+1} - d_k = 0$, тобто число клітин більше ніж k. Отже маємо одну клітину розмірності k, $d_k - d_{k-1} = k - (k-1) = 1$. У загальному випадку наведене правило можна довести за допомогою математичної індукції.

1. *Співаковський О.В., Крекнін В.А.*. Лінійна алгебра. Навч. посібник. – Херсон, 1997. – 148 с.