

Львов М.С., Співаковський О.В., Гуржій Т.А.

Основні задачі проектування комп'ютерних систем підтримки практичної навчальної математичної діяльності

Анотація

В роботі описані загальні вимоги – специфікації проектування прикладних програмних систем, що підтримують практичну математичну діяльність учня, включаючи підтримку символічних перетворень. Запропоновано загальну концепцію такої системи, її об'єктну модель і структурну схему, що базується на природній ієрархії метаматематичних понять. Загальні вимоги до інтерфейсу такого типу ППЗ викладені в [1].

Як перша версія системи детально описується система підтримки курсу алгебри в 7 класі загальноосвітньої школи. Наступні версії матимуть архітектуру і функціональні можливості даної системи. Вони орієнтовані на застосування на уроках алгебри 8-9 класів. В майбутньому планується також проектування та реалізація математичних систем підтримки курсу алгебри і початків аналізу в 10-11 класах загальноосвітньої школи.

Вступ

Багато традиційних комп'ютерних курсів математики базуються на ідеях програмованого навчання, хоча і використовують всі апаратні і програмні можливості сучасної обчислювальної техніки і нові методи представлення знань. Найбільш розвиненою і зробленою як з методичної, так і з технічної точок зору при цьому виявляється лекційна частина курсу. Проблема адекватної підтримки практичних занять по математиці менш розроблена і представляється нам актуальною [6].

Відомі системи комп'ютерної алгебри (CAS) – Axiom, Mathematica, Maple, MathCad і ін., значною мірою вирішують задачу підтримки професійної математичної діяльності, пов'язаної із символічними обчисленнями і чисельними розрахунками. Друга група програмних систем - системи автоматичного доказу теорем (АТР) забезпечують підтримку важливого аспекту математичної діяльності - логічного висновку.

В даний час активно розробляються проблеми інтеграції CAS і АТР у єдину систему. Інтегровані системи в значно більшому ступені виявляються придатними для освітніх цілей. Математична діяльність учня, однак, має певну специфіку.

Метою учня є побудова ходу розв'язання математичної задачі, а не одержання відповіді.

Тому педагогічно орієнтовані математичні системи повинні підтримувати саме хід розв'язання математичної задачі.

1. Концепція підтримки діяльності учня

Один з найважливіших аспектів такої підтримки – *перевірка правильності ходу розв'язання задачі*. Зокрема, вирішуючи алгебраїчну задачу, учень перетворює математичні вирази. Будь-яка помилка, допущена в перетвореннях, приводить у кращому випадку до невірної відповіді. Цей факт виявляється учнем занадто пізно – або при порівнянні з відповіддю, або при одержанні низької оцінки за контрольну роботу. Уникнути цього можна, якщо доручити програмній системі перевірку правильності перетворень на кожному кроці розв'язання подібно тому, як здійснюється перевірка правильності правопису в Microsoft Word.

Другий, не менш значимий аспект підтримки – *автоматизація рутинних дій учня*, зв'язаних з обчисленнями. Так, наприклад, учню X-XI класу алгоритм розв'язання квадратного рівняння чи системи лінійних рівнянь добре знайомий. Проблема полягає в тім, що він змушений витрачати навчальний час на виконання рутинних (для його рівня розвитку) обчислень, спрямованих на пошук відповіді.

Третій аспект – надання учню зручної системи користування навчальною, учбово-методичною і довідковою інформацією. Система також повинна надавати учневі відповідний математичний інструментарій (калькулятор, система побудови графіків тощо.). Цей аспект не має потреби в обґрунтуванні.

2. Концепція підтримки діяльності вчителя

Система повинна забезпечувати ефективне ведення навчального процесу в цілому, підтримуючи взаємодію вчителя й учня.

Перший аспект - *перевірка правильності ходу розв'язання задачі*. Для вчителя цей вид підтримки повинний полягати в тім, що система перевіряє правильність ходу розв'язання всієї задачі, вирішеної раніше учнем (режим самостійної роботи)

Другий аспект підтримки вчителя – *автоматизація тестування знань учнів*. Система повинна здійснювати перевірку знань основних математичних правил і формул

Третій аспект – надання вчителю заздалегідь спланованої відповідно до вимог стандартів *системи навчальних матеріалів* для проведення всього циклу уроків з можливістю його модифікації. Зокрема, Задачник посібника повинен містити завдання для кожного уроку, причому має існувати можливість модифікації цих завдань.

Нарешті, учитель повинен мати можливість використовувати систему на уроках і при викладанні нового матеріалу як електронний підручник.

Пропонований нижче підхід до проектування інтегрованих систем розглядає з єдиних позицій і клас обчислювальних задач, і клас задач на

доведення. Він базується на концепціях, викладених вище. Такий підхід, на наш погляд, є перспективним. Проектована в рамках цього підходу система одержала робочу назву **ТерМ**. Проект системи виник у значній мірі як результат великої експериментальної роботи з реалізації педагогічно-орієнтованих програмних систем і їхніх фрагментів, проведеної в ХДПУ і ІКНАНУ протягом багатьох літ (див. список публікацій).

3. Призначення системи ТерМ

Основне призначення системи **ТерМ** - комп'ютерна підтримка практичних занять і лабораторних робіт з математики - тобто активної математичної діяльності користувача (учня, студента). У процесі такого роду діяльності учень використовує теоретичні знання, придбані на попередніх стадіях навчання, для розв'язання практичних задач.

Система буде використовуватися вчителем на уроці при поясненні методів розв'язання алгебраїчних задач, для проведення самостійних і контрольних робіт. Окремий режим призначений для тестування знань учнів.

Розвиток системи припускає послідовне включення в неї нових предметних областей, так і нових сфер використання, тобто реалізації в повному обсязі концепцій, викладених вище.

4. Об'єктна модель системи ТерМ.

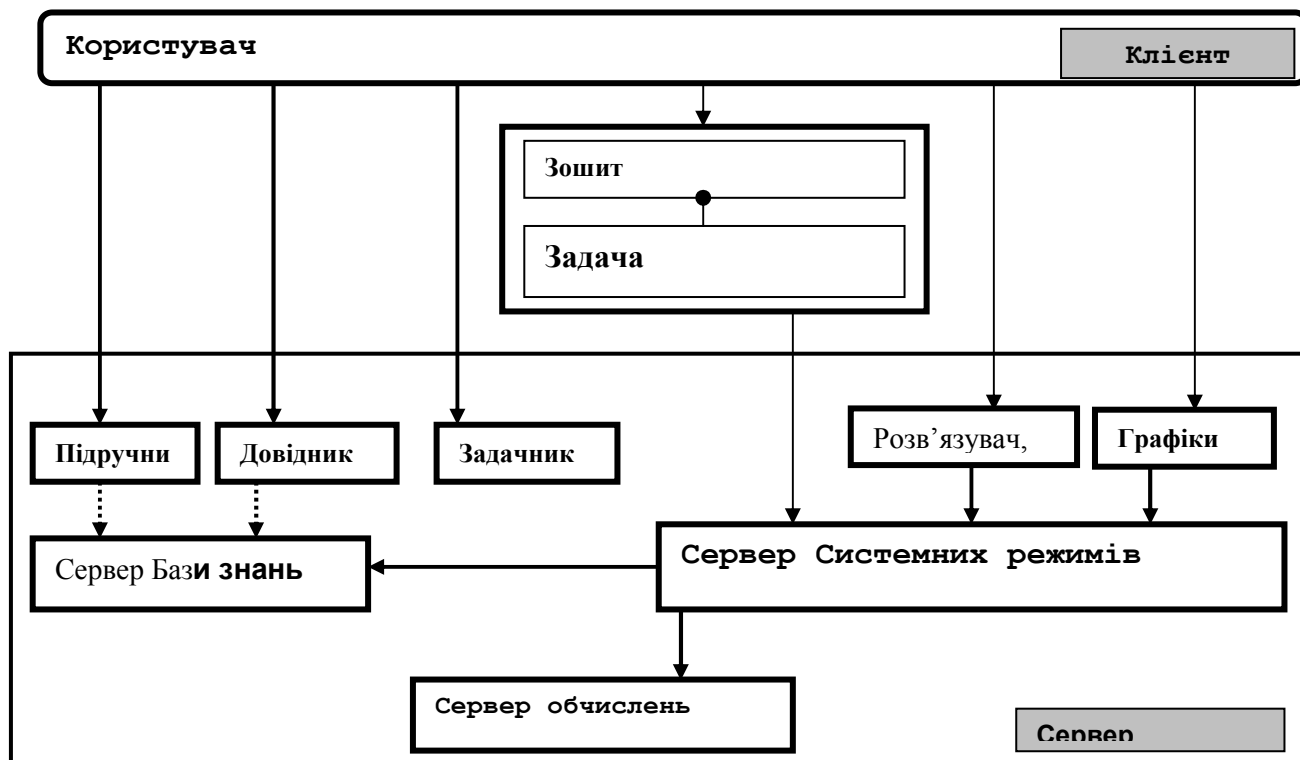


Рис 1. Об'єктна модель математичної системи.

5. Концепція інтерфейсу користувача системи Терм.

- Система підтримує режим дистанційного доступу для організації дистанційного навчання.
- З погляду користувача система являє собою колекцію з робочих зошитів, книг, математичних інструментів і інших об'єктів, що зберігаються у системній папці **Терм**. Розкриття цієї папки означає ініціалізацію системи. Т.ч. серверна частина схована від користувача.
- У подальшій роботі з системою в цілому використовується метафора робочого столу Windows.
- Користувачу надається можливість активно працювати зі своїми зошитами. Інші об'єкти доступні тільки для читання.
- Інтерфейс користувача будь-якого об'єкта – стандартний графічний віконний інтерфейс додатка.
- Система підтримує мови: *Українську, Російську, Англійську*.

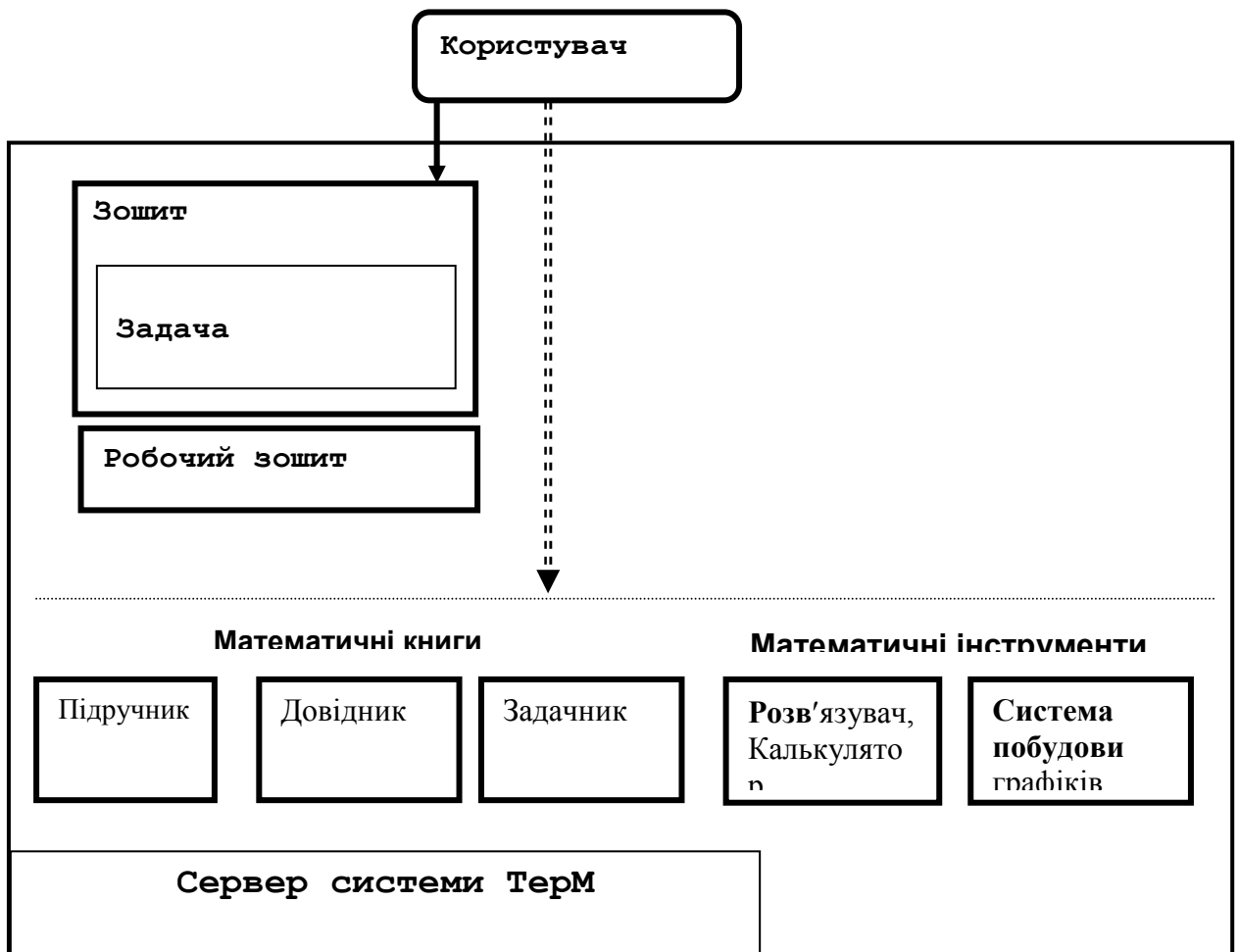


Рис 2. Архітектура Клієнт-Сервер математичної системи.

6. Основні об'єкти системи

Математичні інструменти - об'єкти системи, що надають користувачу додаткові засоби для розв'язання задач. Це *Калькулятор*, *Система Розв'язання*, *Система Доведення*, *Система Побудови графіків*. Користування математичними інструментами можливо як у процесі розв'язання задачі, так і в автономному режимі. Перелічимо основні задачі цих інструментів:

Калькулятор:

- Знайти значення виразу (канонічну форму);
- Факторизувати вираз;
- Перетворити до іншого виду, і т.д.

Система Доведення:

- Перевірити тотожність;
- Перевірити умовну тотожність;

Система Розв'язання:

- Розв'язати рівняння;
- Знайти кількість розв'язків на відрізок;
- Визначити існування розв'язку;

Система побудови графіків:

- Побудувати графік;
- Побудувати графік похідної;
- Побудувати апроксимуючий графік;

Математична література – Сукупність об'єктів системи, що надають користувачу всю необхідну для роботи інформацію. Користування математичною літературою можливо як у процесі розв'язання задачі, так і в автономному режимі. Всі об'єкти математичної літератури мають інтерфейс, та структуру змісту, у точності відповідну структурі стабільного підручника. Математична література – це Підручник, Задачник, Довідник математичних формул. Перелічимо основні задачі і вимоги до книги (об'єкту математичної літератури)

Підручник – сучасний мультимедійний додаток, побудований у виді структурованої колекції Тем і Розділів.

Тема являє собою складений документ з об'єктами текст, формула, графік, малюнок, таблиця, анімація. Зміст теми в точності відповідає змісту параграфа стабільного підручника. Зміст повинний бути коротким, що наочно відбиває основні питання теми.

Розділ – це колекція тем з виділеною назвою. Зміст розділу у точності відповідає змісту глави стабільного підручника.

Задачник – сучасний гіпертекстовий додаток, структурований у відповідності зі структурою підручника – по розділах і темах. Кожна тема являє собою колекцію Задач.

Задача – це складений документ, що містить умову задачі і коментар. *Коментар* - указівки, відповідь, картинки, рекомендації до розв'язання, і т.п.

Умова задачі повинна експортуватися в задачу за вибором користувача.

Довідник математичних формул – колекція, що містить списки елементарних перетворень і формул, що є основними для кожного розділу і теми.

Довідник активно використовується учнем у процесі розв'язання задачі в режимі автоматизації **AutoMode**.

Робочий зошит – основний документ учня. Зошит містить усі задачі, вирішені учнем за допомогою системи. Кожна з вирішених задач має структуру

Задача № <номер задачі >

Умова

<Формулювання умови задачі (експортується з задачника)>

Хід розв'язання

<Хід розв'язання задачі (складається учнем)>

Відповідь: <Відповідь (складається учнем)>

Дата < генерується системою >

Кожну задачу учень вирішує в одному з Режимів розв'язання, підтримуваних системою. Процес розв'язання задачі ми називаємо математичною діяльністю.

7. Концепція комп'ютерної підтримки математичної діяльності

Математична діяльність учня (користувача) полягає в:

⇒ Побудові математичних об'єктів;

⇒ Розпізнаванні властивостей математичних об'єктів;

⇒ Перетвореннях математичних об'єктів.

Математична діяльність здійснюється в рамках відповідної **предметної області**, що описана конструктивно й аксіоматично. Це означає, що:

⇒ математичні об'єкти визначені в предметній області у виді математичних конструкцій;

⇒ властивості математичних об'єктів описані аксіоматично;

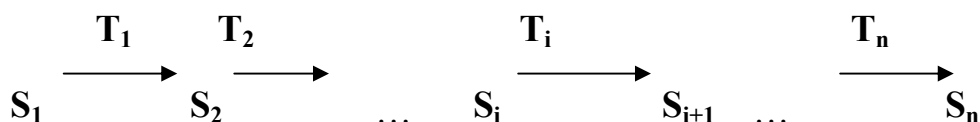
⇒ перетворення об'єктів визначені у вигляді списку припустимих (елементарних) перетворень;

Математична діяльність спрямована на розв'язання **математичної задачі** як основної семантичної одиниці діяльності. Хід розв'язання задачі являє собою послідовність кроків, на кожному з яких користувач:

⇒ розпізнає деяку властивість математичного об'єкта, визначеного в розв'язуваній задачі;

⇒ перетворює цей об'єкт.

Таким чином, процес розв'язання задачі – це послідовність виду



де S_i – математичні об'єкти, а T_i – їхні елементарні перетворення.

З логічної точки зору хід розв'язання задачі – це логічний висновок у відповідній екваціональній теорії, що, як відомо, полягає в підстановці термів замість предметних змінних і заміна термів рівними термами.

Математична діяльність у рамках (досліджуваної) предметної області спирається на використання засобів і методів розв'язання задач з інших (більш елементарних, вивчених, засвоєних раніше) предметних областей.

Комп'ютерна підтримка математичної діяльності полягає в наданні учневі набору засобів і інструментів, що *автоматизують і верифікують* процес розв'язання математичної задачі.

Ця підтримка може здійснюватися системою на декількох рівнях:

Рівень 0:

Спеціалізований редактор, орієнтований на математичну діяльність (реалізація адекватного представлення математичних об'єктів в описі ходу розв'язання математичної задачі), забезпечений математичними інструментами і посібниками (калькулятор, геометричні інструменти, підручник, задачник, довідник тощо)

Рівень 1:

Система, що здійснює синтаксичний аналіз математичних об'єктів і автоматизує процедури їхніх перетворень у ході розв'язання математичної задачі;

Рівень 2:

Система, що здійснює семантичний аналіз перетворень математичних об'єктів (перевірка правильності одного кроку розв'язання задачі);

Рівень 3:

Система семантичного і методичного аналізу ходу розв'язання математичної задачі (перевірка правильності ходу розв'язання задачі як з математичної, так і з методичної точки зору);

8. Формалізація прикладної задачі, підтримуваною системою.

Уточнення формулювань проблем, зв'язаних з реалізацією задач системи, описаних вище, полягають у точному визначенні *предметних областей, алгебраїчних задач і елементарних перетворень*.

Наступний приклад (що відноситься до системи **ТерМ X**) спеціально приведений для ілюстрації техніки, що використовується при побудові формальних моделей. Експериментальна модель – система AICT [3, 4] показала свою адекватність і ефективність.

Приклад. Тригонометричні задачі шкільного типу.

Предметна область **Шкільна тригонометрія** визначається поняттям *правильно побудованого тригонометричного варази (ППТВ)*.

Нехай, наприклад, ППТВ визначається в такий спосіб:

- Тригонометричним аргументом **TrigArg** називається лінійна комбінація змінних і константи **Pi** з раціональними коефіцієнтами.
- Тригонометричним атомом **TrigAtom** називається вираз одного з видів **Sin(TrigAtom), Cos(TrigAtom), Tan(TrigAtom), Cotan(TrigAtom)**
- Тригонометричною константою **TrigConst** називається тригонометричний атом, що не містить входжень змінних.
- Тригонометричним виразом **TrigExpr** називається раціональний вираз від тригонометричних атомів з раціональними коефіцієнтами.

Тригонометрична задача визначається поняттями *умови задачі* і *відповіді задачі*.

- Задача на спрощення

Умова: **TrigExpr**; Відповідь: **TrigExpr**

- Задача на доказ тотожності:

Умова: **TrigExpr = TrigExpr**; Відповідь: **Boolean**

- Задача на доказ тотожності з умовою на аргументи:

Умова: **ArgCond \rightarrow TrigExpr = TrigExpr**; Відповідь: **Boolean**

Алгебра **ArgCond** визначається в Предметній області для виразів умов в умовних тотожностях.

- Задача на розв'язання рівняння:

Умова: **(TrigExpr = TrigExpr, Variable)**; Відповідь: **SolExpr**

Алгебра **SolExpr** також визначається в Предметній області для виразів відповідей – розв'язань тригонометричних рівнянь.

Припустимі **елементарні перетворення** визначаються для кожної конкретної задачі і предметної області.

Спеціальні аксіоми тригонометрії представлені списком тригонометричних тотожностей, класифікованих у такий спосіб:

- Основні значення тригонометричних функцій;
- Формули приведення;
- Формули подвоєного і половинного аргументу;
- Формули суми;
- Основні тригонометричні тотожності;
- Розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь.

Задача спрощення виразу.

- перетворення, що відповідають тригонометричним тотожностям системи;
- тотожні алгебраїчні перетворення;
- прямі і зворотні підстановки.

Задача доказу тотожності

- перетворення спрощень;
- спрощення (умовно тотожні перетворення):

$$A \cdot C = B \cdot C, 3 \neq 0 \implies A = B,$$

$$A/C = B/C, 3 \neq 0 \implies A = B$$

Задача доказу умовної тотожності

- перетворення тотожностей;
- перетворення, обумовлені умовами на аргументи.

Задача розв'язання рівняння

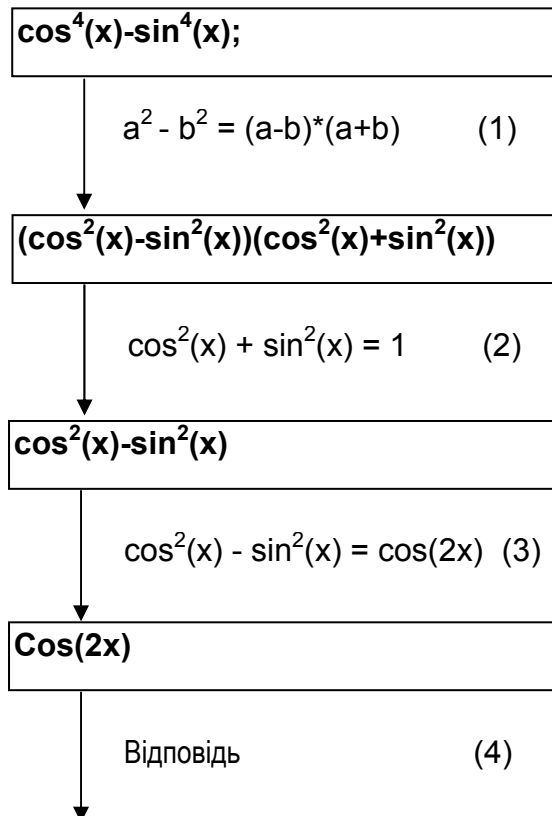
- перетворення спрощень;
- Умовно тотожні перетворення:
 $A \cdot C = B \cdot C, 3 \neq 0 \implies A = B, \{ 3 \neq 0 \text{ означає "C не має коренів"} \}$
 $A/C = B/C, 3 \neq 0 \implies A = B$
- Перетворення факторизації:
 $A \cdot B = 0 \implies A = 0 \text{ чи } B = 0,$
 $A^k = 0 \implies A = 0$
- Розв'язання алгебраїчних рівнянь ступеня $N \leq 3$

Процес розв'язання алгебраїчної задачі

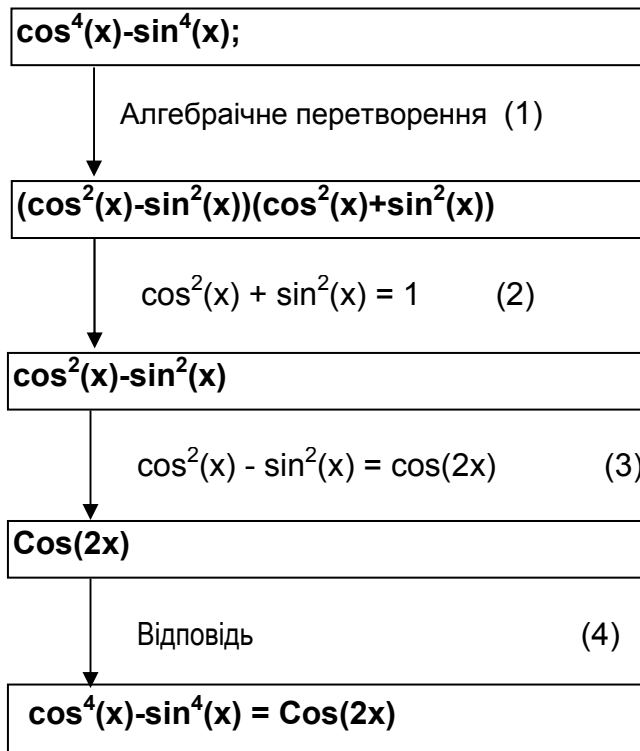
Приклад. (продовження) Процес розв'язання задачі на спрощення

Умова: Спростити вираз $\cos^4(x) - \sin^4(x)$;

Хід розв'язання:



Педагогічно орієнтована система повинна перевіряти знання користувача, що вирішує цей приклад, з тригонометрії. Це означає, що формули перетворень (2), (3) користувач повинний увести самостійно. Система повинна розпізнати їхню правильність. Перетворення (1) не є тригонометричним. Такі перетворення можна дозволити застосовувати «за замовчуванням». Спеціальне перетворення Відповідь (4) указує на те, що розв'язання закінчене. Хід розв'язання повинний бути оформлений у наступному виді:



9. Опис предметних областей і прикладних задач системи Терм VII

Нижче перелічені конкретні теми і задачі, що будуть підтримуватися першою версією системи – ТерМ VII.

9.1. Лінійні рівняння однієї змінної

Форма: $R(X) = L(X)$

Алгебри коефіцієнтів:

Z – цілі числа, Q – раціональні числа, R – дійсні числа.

Елементарні перетворення

- Приведення подібних членів у кожній частині рівняння

- Розкриття дужок у кожній частині рівняння
- Перенесення члена-доданка з лівої частини в праву
- Множення/ділення на число, відмінне від 0.

Канонічна форма $a \cdot X = b$

Прикладні задачі:

- Розв'язати рівняння
- Перевірити розв'язання
- Перевірити рівносильність
- Привести до канонічного виду.
- Розв'язання задач за допомогою рівнянь

Особливості:

Задача містить малюнки, що ілюструють постановку задачі.

У Ході розв'язання передбачається крок - позначення невідомої
Позначимо невідому величину через <атом>

У Ході розв'язання передбачається крок - позначення відповіді
Відповідь: <атом> = <число / вираз>

9.2. Цілі вирази

Форма: $T(X, Y, \dots)$

Алгебри коефіцієнтів: Z, Q, R .

Елементарні перетворення

- Розкриття дужок
- Приведення подібних членів

Канонічна форма Лексично упорядкований приведений вираз без дужок
Термін - стандартний вид.

Прикладні задачі:

- Спростити вираз
- Знайти числове значення виразу при заданих значеннях змінних
- Указати форму виразу, описаного текстом.
- Привести до канонічного виду
- Довести тотожність

Вирази зі степенями, одночлени.

Елементарні перетворення

- перетворення степенів

Прикладні задачі:

- Піднести одночлен до ступеня
- Перемножити одночлени
- Привести до канонічної форми (стандартному виду)

Багаточлени**Прикладні задачі:**

- Знайти одночлени
- Знайти степінь багаточлена
- Алгебраїчні задачі на складання рівнянь з параметрами
- Додавання, обчислення багаточленів
- Множення багаточлена на одночлен
- Множення багаточленів

**Формули скороченого множення: Різниця квадратів. Квадрат двочлена
Різниця і сума кубів. Куб двочлена**

Елементарні перетворення

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
-
-
-
-

Прикладні задачі:

- Представити у виді багаточлена (знайти добуток)
- Знайти співмножник $(a+b)(?-?) = a^2 - b^2$
- Представити у виді добутку

9.3. Розкладання багаточлена на множники.**Елементарні перетворення:**

- Угрупування (висновок у дужках)
- Перетворення факторизації рівняння:
 $F * G = 0 \rightarrow F = 0 \text{ or } G = 0$

Прикладні задачі:

- Розкласти на множники
- Винести за дужки загальний множник
- Знайти помилку в коефіцієнтах або знаках коефіцієнтів, допущену учнем при розкладанні на множники
- Вирішити рівняння, використовуючи розкладання на множники

9.4. Системи лінійних рівнянь.

Форма системи:

$$L1(x, y) = R1(x, y), L2(x, y) = R2(x, y)$$

Канонічна форма

$$L1(x, y) = 0, L2(x, y) = 0$$

$L1(x, y), L2(x, y)$ лексикографічно упорядковані

Канонічна форма розв'язання: $(x; y)$

Алгебри коефіцієнтів: N, Q, R .

Елементарні перетворення

- Підстановка в рівняння замість невідомого його значення
- Лінійне перетворення: $I \implies I + a \cdot J$, де I, J - лінійні рівняння
- Перетворення кожного рівняння
- Відповіді:
 - $(x; y) = (x_0; y_0)$
 - Система розв'язків не має
 - Система має нескінченно багато розв'язків

Прикладні задачі:

- Побудувати графік лінійного рівняння
- Знайти точку перетину графіків 2-х лінійних рівнянь
- Вирішити систему рівнянь
- Визначити кількість розв'язків системи рівнянь
- Арифметичні задачі на складання системи рівнянь

Аналогічно проаналізовано навчальний матеріал 8-9 класів.

Властивості функцій

10. Основні режими системи:

Хід розв'язання алгебраїчної задачі – послідовність кроків, на кожному з яких здійснюється перетворення виразу. Кожен крок розв'язання містить застосовуване перетворення і перетворений вираз.

Розв'язання задачі може здійснюватися в одному з режимів:

10.1. Режим перевірки правильності кроку розв'язання (Check-Step Mode) У цьому режимі учень сам здійснює перетворення виразів, а система перевіряє правильність застосовуваних елементарних перетворень і правильність результату на кожному кроці.

10.2. Режим автоматизованого виконання кроку розв'язання (Auto-Step Mode) У цьому режимі на кожному кроці учень указує на виконуване

перетворення і місце його застосування у виразі, а система виконує ці вказівки, перетворюючи вираз (математичний об'єкт).

10.3. **Режим змішаний** У цьому режимі об'єднані можливості основних режимів Auto-Step Mode і Check-Step Mode.

10.4. **Режим перевірки ходу розв'язання** В цьому режимі учень спочатку записує розв'язання задачі, а потім система перевіряє правильність розв'язання. При виявленні помилки учень має можливість виправити її, відредагувати хід розв'язання і здійснити повторну перевірку.

11. Методологія проектування ядра системи.

Система ТерМ проектується як педагогічно-орієнтована система комп'ютерної алгебри, основою технології якої є *символьні перетворення* [2, 5].



Рис 3. Структурна модель математичної системи

В основі структури системи - представлення її ядра у виді ієрархії метаматематичних понять

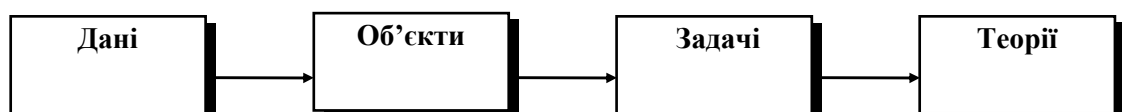


Рис 4 ієрархії метаматематичних понять математичної системи.

11.2. Алгебраїчні типи даних

Аналіз шкільного курсу математики показує, що для реалізації системи **TerM** необхідно реалізувати такі основні алгебраїчні типи даних:

Числові алгебраїчні типи: цілі числа, раціональні числа, дійсні і комплексні числа, радикальні розширення поля раціональних чисел, алгебраїчні розширення різних типів.

Теоретико-множинні і логічні типи: алгебра множин - послідовностей типу арифметичних прогресій, алгебра скінчених підмножин; алгебра числових проміжків, алгебра логіки.

Символьні алгебраїчні типи: раціональні функції і поліноми багатьох змінних, лінійні поліноми багатьох змінних і P_i ;

Конструктивно-визначені алгебраїчні типи: лінійні алгебри – алгебри матриць, лінійні векторні простори, евклідові простори, напівгрупи слів і групи підстановок, і інші алгебраїчні типи, що використовуються математичними теоріями;

Символьні типи елементарних функцій: Спеціальні класи елементарних функцій, що включають логарифми та експоненти, оператори диференціювання й інтегрування, раціональні тригонометричні функції і тригонометричні поліноми;

Числові тригонометричні типи: поля поділу кола і поля Галуа, розширення поля раціональних чисел числами $\sin(k\pi/n)$, $\cos(k\pi/n)$;

Основою (нижнім рівнем) системи **TerM** є поліструктурна ієрархія алгебраїчних типів даних, побудована як структура абстрактних (аксіоматичних) і конструктивних алгебраїчних систем. Такий підхід дає можливість вже в першій версії системи (**TerM VII**) передбачити можливість природного і методологічно правильного розвитку, погодженого зі структурою середньої, а потім і вищої математичної освіти.

Основними типами структур ієрархії є:

- структура спадкування абстрактних і конструктивних властивостей алгебр;
- структура основності (багатоосновних) алгебр;
- структура розширень (тобто конструкцій і вкладень) алгебр;
- структура морфізмів подібних алгебр

11.3 Конкретні типи даних: сигнатура і конструювання

№	Ім'я типу	Сигнатура	Конструкція
0	Atom	операції лінійного порядку $< > \leq \geq == \diamond$ max min	Успадковує LinOrder
1	Cardinal	Відносини лінійного порядку Арифметичні операції $+ - * \text{div mod gcd } a^N$ srt(a) пробує здобути кв. корінь	Успадковує LinOrder Успадковує IntDomain
2	Integer	Операції лінійного порядку Арифметичні операції $+ - * ^N a $ перетворить тип	Розширення Cardinal $(a, 0) = (\text{Cardinal})a$
3	Rational	Операції лінійного порядку Арифметичні операції $+ - * / ^N$ Srt(a) пробує обчислити квадратний. корінь Per(a) перетворить у період дріб Num(a), Den(a) – чисельник, знаменник	Конструкція QuotField Розширення Integer (Поле часток)
4	Real	Операції лінійно- впорядкованого поля srt(a) – наближений кв.корінь Int(a) - ціла частина fra(a) – дробова частина	Успадковує Field , LinOrder Розширення Integer
5	Periodical	Операції Real Rat(a) перетворить у Rational Int(a) - ціла частина fra(a) – дробова частина до періоду per(a) – період	Розширення Real
6	Radical_2	Операції лінійно упорядкованого поля Real(a) перетворить наближено в Real Rpart(a), Ipart(a) – раціональна та ірраціональна частини	(Алгебраїчне) розширення Rational коренями $x^2=P$
7	SqrRadical	Операції лінійно упорядкованого поля	Башта розширень Radical_2

8	<i>RatComplex</i>	У 1-ої версії не інтерпретується	
9	<i>Complex</i>	У 1-ої версії не інтерпретується	
10	<i>RadComplex</i>	У 1-ої версії не інтерпретується	
11	<i>Interval</i>	Символьна константа Inf інтерпретує нескінченність Теоретико-множинні операції $a \& b$ $a \parallel b$ $a \setminus b$ $\text{Alfa in } a$ Геометричні перетворення $\text{Alfa} * a$, $a + \text{Alfa}$ $\text{Len}(a)$ – довжина інтервалу $\text{Beg}(a)$, $\text{End}(a)$ – начало, кінець інтервалу	Успадковує SubSet Розширення LinOrdField
12	<i>PolyInterval</i>	Теоретико-множинні операції $a \& b$ $a \parallel b$ $a \setminus b$ $\text{Alfa in } a$ $\text{Len}(a)$ – довжина числової множини $\text{Interval}(a, n)$ – n-тий інтервал	Башта розширень Interval
13	<i>FinitSet</i>	Теоретико-множинні операції $a \& b$ $a \parallel b$ $a \setminus b$ $\text{Alfa in } a$ $\text{Pow}(a)$ – потужність a $\text{Item}(a, n)$ n-тий елемент a	Успадковує SubSet Башта розширень LinOrdField
14	<i>ArithmProgr</i>	Теоретико-множинні операції $a \& b$ $a \parallel b$ $a \setminus b$ $\text{Alfa in } a$	Успадковує SubSet
15	<i>GeomProgr</i>	Теоретико-множинні операції $a \& b$ $a \parallel b$ $a \setminus b$ $\text{Alfa in } a$	Успадковує SubSet
16	<i>LinMonom</i>	$\text{Coef}(a)$, $\text{Var}(a)$ $\text{Var}(a) == \text{Var}(b) \rightarrow a + b$ визначено $\text{Var}(a) == \text{Var}(b) \rightarrow a - b$ визначено $\text{Alfa} * a$	Успадковує VectorSpace Розширення Atom , Field
17	<i>LinearSpace, AfnSpace</i>	$a + b$, $a - b$, $\text{Alfa} * a$	Башта розширень VectorSpace Розширення Field і VectorSpace
18	<i>Degree</i>	$\text{Var}(a)$ $\text{Var}(a) == \text{Var}(b) \rightarrow a * b$ визначено a^N	Успадковує SemiGroup Башта розширень Atom

19	Monom	Coef(a), Var(a) Var(a)==Var(b) $a*b$ визначено a^N	Успадковує SemiGroup Розширення Degree
20	MultiDegree	Var(a, k) $a*b$, a^N	Башта розширень Degree
21	MultiMonom	Coef(a), Var(a, k) $a*b$, a^N	розширення MultiDegree , Atom
22	Polynom	Операції області цілісності LeadMonom(a) Srt(a) пробує обчислити кв. корінь	Башта розширень Monom
23	MultiPolinom	Операції області цілісності LeadMonom(a)	Башта розширень Polynom Башта розширень Multimonom
24	RatExpr	Операції поля часток Арифметичні операції $+ - * / ^N$ Per(a) перетворює у період дріб Num(a), Den(a) – чисельник, знаменник	
25	RatMultiExpr	Операції полючи часток Арифметичні операції $+ - * / ^N$ Per(a) перетворює у період дріб Num(a), Den(a) – чисельник, знаменник	Розширення MultiPolynom (Поле часток)
26	RadExpr	У 1-ої версії не інтерпретується	Схоже на SqrRadical
27	RadPolyExpr	У 1-ої версії не інтерпретується	

11.4. Абстрактні алгебраїчні типи даних

№	Ім'я типу	Абстрактні властивості
0	Set	Алгебра множин Відношення $==$, $<>$ ($a == a$), рівність переважується в кожному конкретному типі.
1	SemiGroup	У системі використовуються комутативні напівгрупи з 1 – нейтральний елемент і 0 – анулятор $a*1 = 1*a = a$ $a*0 = 0*a = 0$

3	SubSet	Булева алгебра виділений елемент O (Empty) операції $a \& b$ $a \parallel b$ $a \setminus b$ відношення $a < b$, $a \leq b$, $a > b$, $a \geq b$ ($a < b = \text{df} = (a \triangleleft b)$) && ($a \& b = a$)
2	LinOrder	Лінійний порядок $\text{Min}(a, b) = a$ чи b $\text{Max}(a, b) = a$ чи b
3	VectorSpace	Векторний простір над полем Field
4	IntDomain EuclidDomain	<i>Область цілісності</i> : визначена операція приведення дробів, не виражена через div , mod У системі це кільце багаточленів багатьох змінних MultiPolinom <i>Евклідова область</i> : визначені div mod gcd(div, mod) У системі це Rational Polynom
5	Field	Поле: Операція ділення на нуль збуджує виняткову ситуацію
6	LinOrdField	Лінійно - упорядковане поле Операція Srt(negative) збуджує виняткову ситуацію

11.5. Конструкції (шаблони) алгебраїчних типів

№	Ім'я типу	Опис конструкції	Список конструктивних типів
	StatExt	Статичні конструкції	
1	GenMonom	Шаблон Статичне розширення (Поле, Напівгрупа)	LinMonom(Field, Atom) Monom(Field, Degree) Multimonom(Field, MultiDegree)
2	Real	Статичне розширення (Integer, Cardinal)	Real
3	Periodical	Статичне розширення (Real, Cardinal)	Periodical
4	AfinSpace	Шаблон Статичне розширення (Field, VectorSpace(Field))	AfinSpace
5	QuotField	Шаблон Статичне розширення (IntDomain, IntDomain)	Rational(Integer, Cardinal) RatExpr(Polynomial, Polynomial) MultiRatExpr(MultiPolynomial, MuPol)
6	RadExtension	Шаблон Статичне розширення (ExtRat, ExtRat, Cardinal P)	Radical_2(Rational, Rational, P)
7	Interval	Шаблон	Interval

		Статичне розширення (LinOrdField, LinOrdField)	
	<i>DynExt</i>	<i>Динамічні конструкції</i>	
8	<i>Sequence</i> Functional Recursive	Шаблон $A[0] = B$ $A[I+1] = \{B, A[i]\}$ Форма визначення: $S_0 = \{s_1, \dots, s_N\}$ $S_{i+1} = F(S_i, p_1, \dots, p_k)$ F – рекурсивне визначення p_1, \dots, p_k - параметри	FinitSet B = Set PolyInterval B = Interval
8	<i>LinDynExt</i>	Шаблон Лінійна Динамічна конструкція (Башта розширень) $A[0] = B$ $A[I+1] = \text{StatExt}(B, A[i])$	LinearSpace B = LinMonom Polynom B = Monom MultiDegree B = Degree MultiPolynom B = Multimonom
9	<i>BinDynExt</i>	Шаблон $A[0] = B$ $A[I+1] = \text{StatExt}(A[i], A[i])$	SqrRadical B = Radical_2
10	<i>DynDynExt</i>	Шаблон $A[0] = B$ $A[I+1] = \text{DynExt}(B, A[i])$	MultiPolynom B = Field DynExt = Polynom

11.5. Ієрархії типів

Числові типи

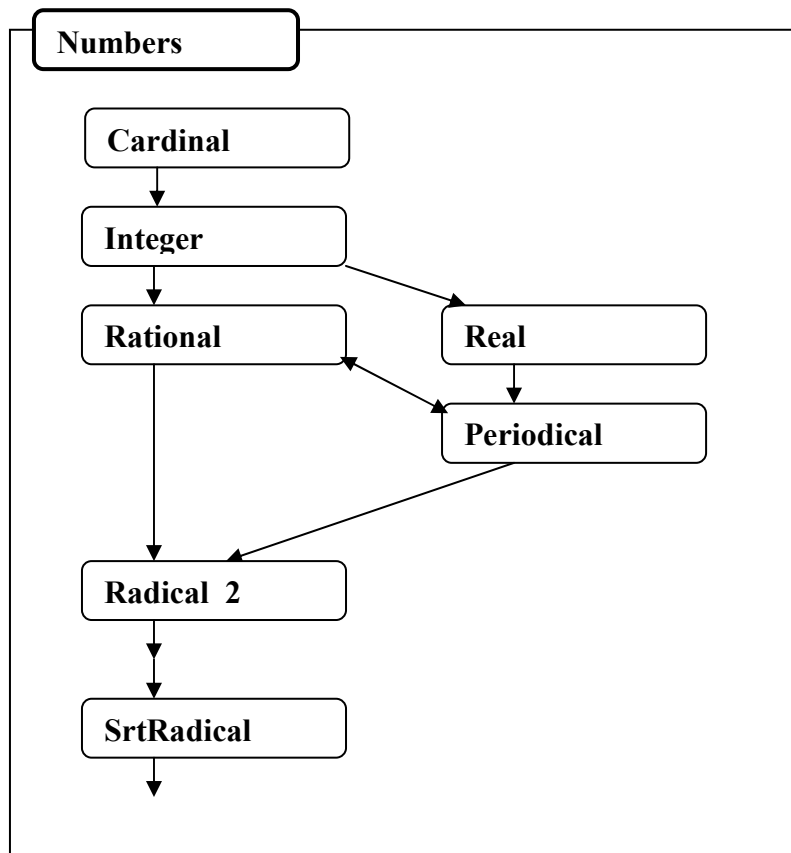


Рис 5. Ієрархія числових типів

Множинні типи

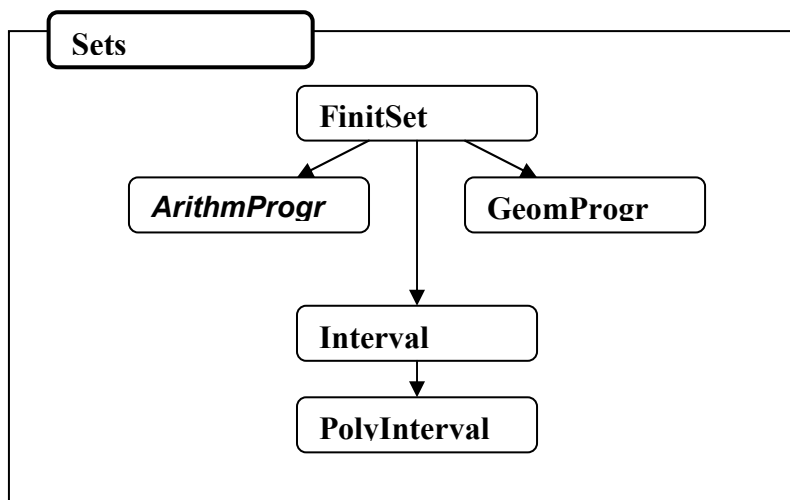


Рис 6. Ієрархія множинних типів

Символьні типи

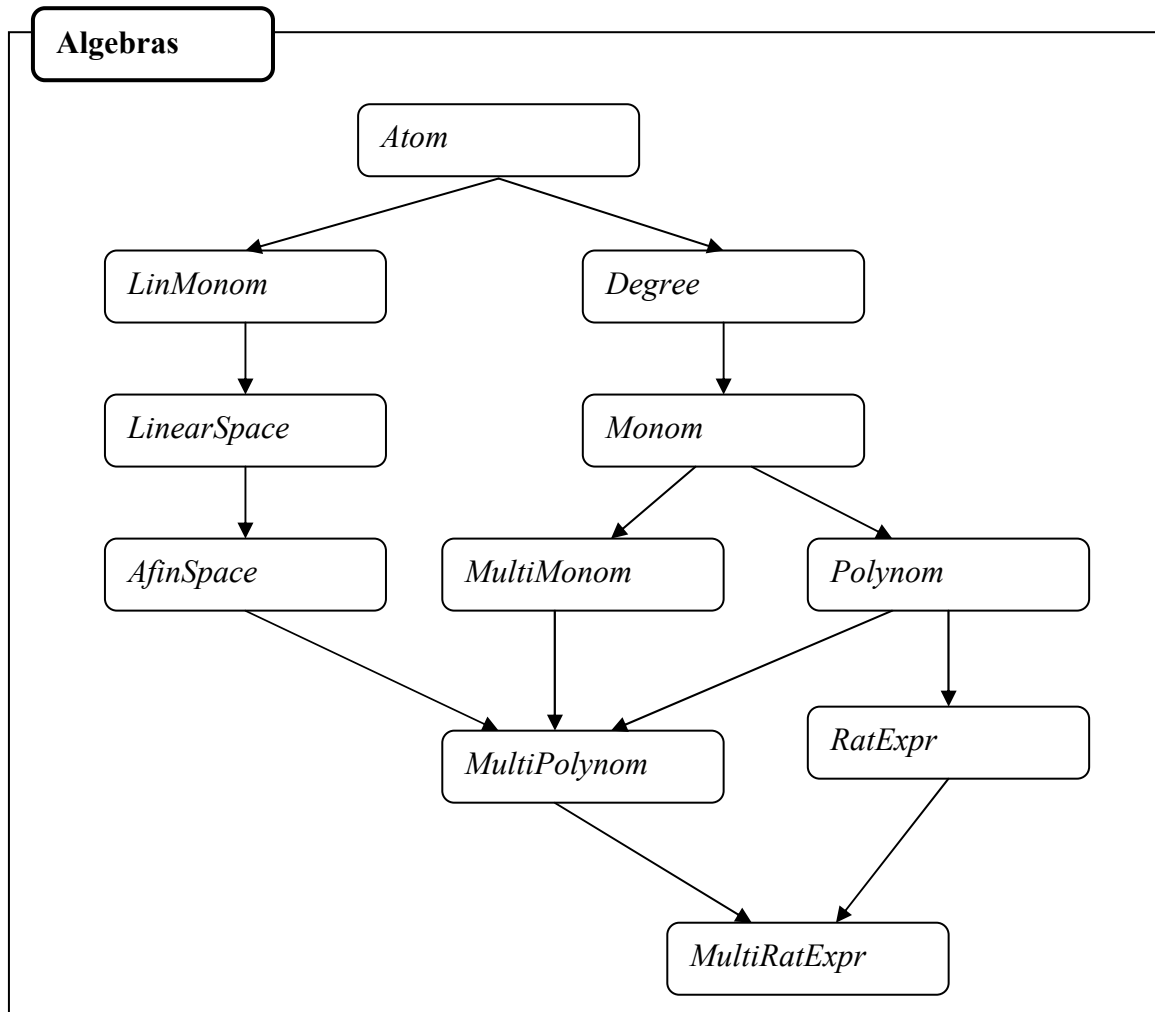


Рис 7. Ієрархія алгебраїчних типів

12. Математичні об'єкти

Наступний рівень системи – рівень конструктивних визначень математичних об'єктів – також представляє собою поліструктурну ієрархію, засновану на ієрархії алгебраїчних типів. Характерні приклади математичних об'єктів – рівняння, графік функції, система лінійних рівнянь, тощо. Трансцендентне рівняння, наприклад, як математичний об'єкт, описується наступною структурою

Відзначимо, що структура спадкування алгебраїчних типів містить описи методів розв'язання рівнянь у відповідних алгебрах. Так, абстрактна алгебра **Поле часток** містить наступне правило розв'язання рівняння

$$(A * x = B) = (x = A^{-1} * B)$$

Таким чином, підтримка розв'язань лінійних рівнянь закладена вже на абстрактному рівні представлення даних

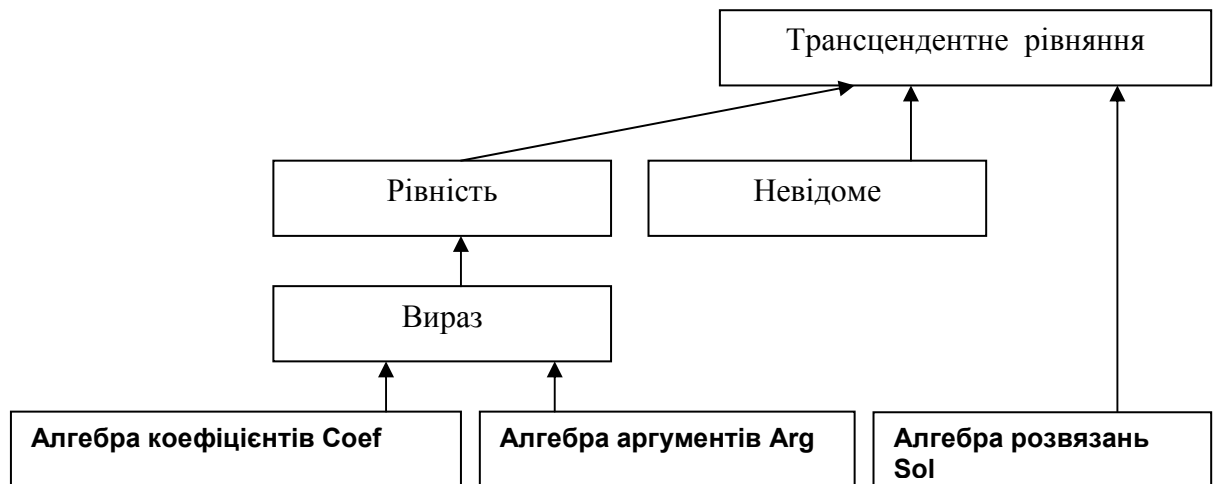


Рис 5. Структура об'єкта Трансцендентне

12.1. Математичні об'єкти системи Терм 7-9

Вирази

- Цілі вирази
 - Ступені
 - Одночлени
 - Двочлени
 - Лінійні вирази
 - Квадратні тричлени
 - Багаточлени
- Раціональні вирази
- Радикальні вирази

Рівності

- Лінійні рівності
- Цілі рівності
- Раціональні рівності
- Радикальні рівності

Рівняння

- Лінійні рівняння
- Квадратні рівняння
- Цілі рівняння
- Раціональні рівняння
- Радикальні рівняння

Нерівності (для доказу)

- Лінійні нерівності

Цілі нерівності
 Квадратні нерівності
 Нерівності ступеня N
 Раціональні нерівності
 Радикальні нерівності

Нерівності з невідомими (для рішення)

Лінійні нерівності
 Цілі нерівності
 Квадратні нерівності
 Нерівності ступеня N
 Раціональні нерівності
 Радикальні нерівності

Системи рівнянь

Системи лінійних рівнянь
 Системи поліноміальних рівнянь
 Системи раціональних рівнянь
 Системи радикальних рівнянь

Системи нерівностей

Системи лінійних нерівностей
 Системи поліноміальних нерівностей
 Системи раціональних нерівностей
 Системи радикальних нерівностей

Функції

Гладкі функції

Лінійні функції
 Дрібно-лінійні функції
 Квадратичні функції.
 Функція квадратного радикала $y = \text{Sqrt}(x)$
 Поліноміальні функції
 Статечні функції
 Раціональні функції

Функції з модулями

Лінійні функції з модулями
 Дрібно-лінійні функції з модулями
 Квадратичні функції з модулями
 Поліноміальні функції з модулями
 Статечні функції з модулями
 Раціональні функції з модулями

Графіки

Прямі (Лінійна функція)
 Гіперболи (Дрібно-лінійна функція)
 Параболи (Квадратичні функції)
 Степеневі функції

Раціональні функції

Послідовності

Функціональні послідовності (функції натурального аргументу)

Рекурентні послідовності

Арифметична прогресія

Геометрична прогресія

Геометричні множини

Координатна площина

Область

Напівплощина

Плоский Кут

Багатокутна область

Багатокутник

Лінія

Графік алгебраїчної залежності

Коло

Пряма на площині

Промінь на площині

Числова пряма

Промінь числової прямої

Відрізок числової прямої

Інтервал на числовій прямій

Напівінтервал числовій прямій

Скінчена множина точок

Числова множина (Скінчене об'єднання променів, відрізків, інтервалів, напівінтервалів і точок на числовій прямій)

13. Прикладні і системні задачі.

Як і нижні рівні системи, рівень **Задачі** також описується у виді поліструктурної ієрархії [7]. Ми визначаємо, однак, два принципово різних типи задач:

- Прикладні задачі;
- Системні задачі.

Прикладні задачі – це ті математичні задачі, на підтримку процесу розв'язання яких орієнтована система. Кожна прикладна задача розглядається як відображення математичного об'єкта (Умови) в інший математичний об'єкт (Розв'язок)

<Problem> : <Condition> → <Solution>

Так, прикладна задача **Solve** – Розв'язання рівняння визначається відображенням

Solve : Equation \rightarrow Sol

Прикладна задача **Prove** – Доказ тотожності визначається відображенням

$$\text{Prove : Equality} \rightarrow \{\text{False, True}\}$$

Прикладна задача **Simplify** – Спрощення врази визначається відображенням

$$\text{Simplify : Expression} \rightarrow \text{Expression}$$

Системні задачі вирішують власні проблеми системи – проблеми підтримки процесу розв'язання прикладних задач.

От, наприклад, список системних задач роздягнула **Simplifications** теорії **Check-Step Mode**

- Перевірка правильності спеціального елементарного перетворення;
- Перевірка правильності застосування спеціального елементарного перетворення;
- Перевірка правильності застосування загального перетворення;
- Перевірка правильності виконання підстановки;

Відзначимо, що описи методів розв'язання прикладних задач – невід'ємна частина ієрархій нижнього рівня (математичних об'єктів і алгебраїчних типів даних), у той час як системні задачі утворюють власну, незалежну ієрархію, що тільки використовує ієрархії нижнього рівня.

14. Теорії

Теорії – це структури, що поєднують відповідно прикладні і системні задачі в єдине ціле. Так, структура основних задач лінійної алгебри утворить теорію Лінійна алгебра, Тому і теорії класифікуються як прикладні і системні. При цьому Прикладна теорія відіграє роль параметра Системної теорії.

Режим системи ТерМ = <Системна теорія> (<Прикладна теорія>)

Так, у режим **Auto-Step(Лінійна алгебра)** підтримує автоматичне розв'язання ієрархії задач, розв'язуваних лінійними перетвореннями.

У системі буде цілком реалізований 2-ий рівень підтримки. Оскільки методи розв'язання основних задач носять загальний характер, вони можуть бути використані в реалізаціях інших предметних областей елементарної і вищої алгебри: Алгебра радикалів; Логарифми й експоненти; Символьне диференціювання; Символьне інтегрування і т.д.

Література

1. Спиваковский А.В. Педагогические программные средства: объектно-ориентированный подход. // Информатика и образование. - 1990.- № 2, С. 71-73.
2. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konozenko S.V. Computations in APS. // Theoretical Computer Science 1993.- 119.- pp. 145-171
3. Lvov M.S. Applied Computer Support of Mathematical Training Proc. of Internal Work Shop in Computer Algebra Applications, Kiev, July 9, 1993, pp 25-26
4. Lvov M.S. Volkov V.A., Kuprienko A.B. AIST: Applied Computer Algebra System Proc. of ICCTE'93. Kiev 14-17 sept., pp 25-26
5. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Lvov M.S. Volkov V.A. Tools for solving problems in the scope of algebraic programming Lectures Notes in Computer Sciences № 958 1995, pp 31-46
6. Львов М.С., Спиваковский А.В.. Методы проектирования систем компьютерной поддержки математического образования. «Математические модели и современные информационные технологии» – Материалы международной конференции по математическому моделированию, Херсон 3-6 сент.1998, с. 101-110
7. Львов М.С. Алгоритмы автоматизации проверки правильности хода решения алгебраических задач. “Інформаційна структура вищих закладів освіти.” Збірка праць міжнародної наукової конференції. Херсон, ХДПУ, 2000. т.2. с.165-177