УДК 519. 41/47

А.В. Спиваковский

КОНЕЧНЫЕ 2-ГРУППЫ, БЛИЗКИЕ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ ГРУППАМ

В теории абстрактных групп одно из важных мест принадлежит изучению групп по заданным свойствам системы их подгрупп. В частности, большое число работ посвящено изучению групп по заданной системе их инвариантных подгрупп (см., например, [1]).

Гамильтоновы группы - это неабелевы группы, в которых инвариантны все подгруппы. Как известно, строение конечных гамильтоновых групп описывается следующей теоремой.

Т е о р е м а (см., например, [2]). Конечная гамильтонова группа представима в виде прямого произведения

$$A \times Q \times T$$

трех подгрупп A , Q , T , первая из которых является абелевой группой нечетного порядка, вторая - группа кватернионов, а третья - элементарная абелева 2-группа.

В связи с этим последним результатом естественно выглядит вопрос о близости класса конечных 2-групп, разложимых в произведение QT двух подгрупп, первая из которых - группа кватернионов, а вторая - элементарная абелева 2-группа, и класса конечных гамильтоновых 2-групп. Для решения этой задачи фактически надо в группе $G = QT$ найти достаточно большой абелев нормальный делитель этой группы. Отметим, что по теореме 12.2.2 из[3] нам известно только лишь о существовании в группе T нормальной подгруппы группы G , имеющей индекс в T , равный 2^7, естественно предполагая, что $|T| \geqslant 2^7$. Нам же удалось показать наличие в группе G ее нормальной подгруппы, являющейся, во-первых, элементарной абелевой группой, а во-вторых, имеющей в G индекс, равный 8, при этом конкретно указав как она связана с подгруппами T и Q .

При решении поставленной задачи рассмотрены более общие ситуации, в которых удалось получить некоторые критерии инвариантности в конечных 2-группах, имеющие самостоятельный интерес.

§ 1. О некоторых критериях инвариантности в конечных 2-группах

Т е о р е м а 1. Пусть конечная 2-группа $G = G_1G_2$, где G_1 – элементарная абелева подгруппа и $G_1 \cap G_2 = E$. Если в подгруппе G_1 существует базис $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ такой, что для любого элемента f_i, $i = 1, 2, \dots, n$, верно равенство:

$$C_{G_2}(\langle f_i \rangle) = E ,$$

то $G_1 \lhd G_2$ и $G = G_1 \leftthreetimes G_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть наше утверждение неверно. Тогда $N_G(G_1) \neq G$ и в силу нормализаторного условия $N_G(N_G(G_1)) \neq N_G(G_1)$. Следовательно, существует нетривиальный элемент ℓ такой, что $\ell \notin N_G(G_1)$, $\ell \in N_G(N_G(G_1))$ и $\ell \in G_2$. Поэтому в базисе $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ подгруппы G_1 найдется элемент f_k такой, что

$$\ell f_k \ell^{-1} = fS, \tag{1}$$

где $f \in G_1$ и $S \in N_{G_2}(G_1)$. Из соотношения (1) следует, что $(\ell f_k \ell^{-1} S^{-1})(\ell f_k \ell^{-1} S^{-1})^2 = 1$, откуда $f_k(\ell^{-1}S^{-1}\ell)f_k(\ell^{-1}S^{-1}\ell) = 1$, а значит, $(\ell^{-1}S^{-1}\ell)f_k(\ell^{-1}S\ell) = f_k(\ell^{-1}S^2\ell)$.

Поскольку элемент $\ell^{-1}S\ell$ лежит в группе $N_G(G_1)$, то $S^2 = 1$ и

$$(\ell^{-1}S^{-1}\ell)f_k(\ell^{-1}S\ell) = f_k . \tag{2}$$

Далее, так как $C_{G_2}(\langle f_k \rangle) = E$, то $(\ell^{-1}S\ell) \in G_1$, но этого быть не может, поскольку элементы ℓ и S лежат в подгруппе G_2. В силу полученного противоречия теорема 1 доказана.

Полученный критерий позволяет в некоторых конкретных ситуациях довольно просто выяснить нормальность элементарного абелевого множителя конечной 2-группы.

С л е д с т в и е 1. Пусть конечная 2-группа $G = G_1G_2$, где G_1 – элементарная абелева подгруппа, а G_2 – циклическая подгруппа. Если инволюция из G_2 не лежит в центре $Z(G)$ группы G, то $G = G_1 \leftthreetimes G_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $G_2 = \langle a \rangle$ и $b \in \langle a \rangle$, $b^2 = a^{2n} = 1$. Поскольку элемент b не лежит в $Z(G)$, то в подгруппе G_1 найдутся нетривиальные элементы $f_1, f_2, \ldots, f_s$ такие, что

$$G_1 = \langle f_1 \rangle \times \langle f_2 \rangle \times \ldots \times \langle f_s \rangle \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \ldots \times \langle c_\ell \rangle,$$

где $c_j b c_j = b$ и $f_i b f_i \neq b$ для всех $j = 1, 2, \ldots, \ell$ и всех $i = 1, 2, \ldots, s$. Следовательно,

$$G_1 = \langle f_1 \rangle \times \langle f_2 \rangle \times \ldots \times \langle f_s \rangle \times \langle c_1 f_1 \rangle \times \langle c_2 f_1 \rangle \times \ldots \times \langle c_\ell f_1 \rangle.$$

Так как базис $\{f_1, f_2, \ldots, f_s, c_1 f_1, c_2 f_1, \ldots, c_\ell f_1\}$ подгруппы G_1 удовлетворяет условиям теоремы 1, то следствие 1 доказано.

С л е д с т в и е 2. Пусть конечная 2-группа G разложима в произведение

$$G = G_1 G_2$$

двух подгрупп G_1 и G_2, первая из которых элементарная абелева, а вторая – обобщенная группа кватернионов. Если инволюция из подгруппы G_2 не лежит в центре $Z(G)$ группы G, то $G = G_1 \leftthreetimes G_2$.

Доказательство следствия 2 проводится абсолютно аналогично доказательству следствия 1.

Естественно теперь, перед рассмотрением основной задачи, выяснить строение конечной 2-группы, разложимой в произвецение элементарных абелевых подгрупп, одна из которых имеет порядок 4. Эта ситуация может возникунть, если центр группы кватернионов лежит в центре всей конечной группы, разложимой в произведение элементарной абелевой подгруппы и группы кватернионов.

Л е м м а 1. Пусть конечная неабелева 2-группа G разложима в произведение

$$G = G_1 G_2$$

двух подгрупп G_1 и G_2, первая из которых элементарная абелева, а вторая – четверная группа Клейна. Если $N_G(G_1) \neq C_G(G_1)$, то $G_1 \lhd G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда $N_{G_2}(G_1) \neq G_2$, а в силу нормализаторного условия $N_{G_2}(G_1) \neq E$. Т.е. $N_{G_2}(G_1) = \langle b_1 \rangle$, где b_1 – элемент порядка 2 из подгруппы G_2. Обозначим для определенности второй базисный элемент подгруппы G_2 через b_2. Далее, так как элемент по условию не действует тождественно на элементы подгруппы G_1, так же, как и при доказательстве следствия 1, в подгруппе G_1 получаем базис $\{f_1, f_2, \dots, f_s, f_{s+1}, \dots, f_n\}$ такой, что

$$b_1 f_i b_1 \neq f_i \tag{3}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, s, s+1, \dots, n$. Не теряя общности рассуждений, полагаем $b_2 f_i b_2 \neq f_i$, $i = 1, 2, \dots, s$ и $b_2 f_j b_2 = f_j$ для $j = s+1, \dots, n$. Поскольку $b_2 \notin N_{G_2}(G_1)$, то найдется базисный элемент f_k, $1 \leq k \leq s$, такой, что

$$b_2 f_k b_2 = f b_1 , \tag{4}$$

где $f \in G_1$. Из соотношения (4) непосредственно вытекает, что $(b_2 f_k b_2 b_1)(b_2 f_k b_2 b_1) = 1$, откуда $f_k b_1 f_k b_1 = 1$, а следовательно,

$$b_1 f_k b_1 = f_k . \tag{5}$$

Но последнее соотношение противоречит соотношению (3), в силу чего лемма 1 доказана.

Из последнего утверждения немедленно следует предложение, дающее конструктивное описание конечной 2-группы, разложимой в произведение элементарной абелевой подгруппы и четверной группы Клейна.

Следствие 3. Конечная 2-группа G тогда и только тогда разложима в произведение двух элементарных абелевых подгрупп, одна из которых четвёрная, когда G - группа одного из следующих типов:

1) G - элементарная абелева группа;

2) G - неабелева группа, разложимая в полупрямое произведение элементарной абелевой подгруппы и циклической подгруппы порядка 2;

3) G - неабелева группа, разложимая в полупрямое произведение элементарной абелевой подгруппы и четверной группы Клейна.

§ 2. О строении конечной 2-группы, разложимой в произведение элементарной абелевой подгруппы и группы кватернионов

Существенно используя результаты предыдущего параграфа настоящей работы, нам удается получить следующее основное предложение нашего исследования.

Т е о р е м а 2. Если конечная 2-группа G представима в виде произведения

$$G = G_1 G_2$$

двух подгрупп G_1 и G_2, первая из которых элементарная абелева, а вторая – группа кватернионов $G_2 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, a^{-1}b = ba \rangle$, то верно одно из следующих предложений:

1) подгруппа G_1 нормальная в группе G;

2) подгруппа $G_1\langle a^2\rangle$ нормальна в группе G и элемент a^2 лежит в центре всей группы G;

3) подгруппа $G_1\langle a\rangle$ абелева;

4) $G = (R, K)\lambda\langle h\rangle$, где $R \times \langle h\rangle \subseteq G_1$, $K = \langle at, b \mid (at)^4 = 1, (at)^2 = b^2, (at)^{-1}b = b(at), t \in R\langle a^2\rangle, t \in Z(G)\rangle$ – группа кватернионов, $(at)^h = (at)^{-1}$, $b^h = (at)b$, $\langle R, \langle at\rangle\rangle = R \times \langle at\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если элемент a^2 не лежит в центре $Z(G)$ группы G, то в силу следствия 2 подгруппа G_1 нормальна в группе G, а следовательно, G – группа, указанная в п.1 теоремы 2.

Пусть $a^2 \in Z(G)$. Если подгруппа $G_1\langle a^2\rangle$ нормальна в группе G, то G – группа, указанная в п.2 настоящего предложения.

Предположим поэтому, что подгруппа $G_1\langle a^2\rangle$ не является таковой. Тогда, с точностью до выбора образующих a и b группы G_2, нормализатор $N_G(G_1\langle a^2\rangle)$ совпадает с подгруппой $G_1\langle a\rangle$. При этом, поскольку индекс подгруппы $G_1\langle a\rangle$ в групше G равен 2, то $G_1\langle a\rangle \triangleleft G$. Если теперь подгруппа $G_1\langle a\rangle$ является абелевой, то G – группа, указанная в п.3 теоремы 2.

Поэтому в дальнейшем положим, что $G_1\langle a\rangle$ не является абелевой группой. Фактор-группа

$$\bar{G} = G/\langle a^2\rangle = \bar{G}_1 \bar{G}_2,$$

где $\bar{G}_1$ - элементарная абелева подгруппа, а $\bar{G}_2$ - четверная группа Клейна. При этом образ элемента a, обозначим его через $\bar{a}$, нормализует подгруппу $\bar{G}_1$.

Если элемент $\bar{a}$ не лежит в центре $Z(\bar{G})$ группы $\bar{G}$, то в силу леммы 1 подгруппа $\bar{G}_1$ нормальна в фактор-группе $\bar{G}$, а следовательно, подгруппа $G_1\langle a^2\rangle$ нормальна в группе G, что противоречит нашему предположению. Следовательно, элемент $\bar{a}$ лежит в $Z(\bar{G})$. Таким образом, для любого элемента f из подгруппы G_1 верно одно из следующих соотношений: $a^{-1}fa = f$, либо $a^{-1}fa = fa^2$. Покажем, что и в первом и во втором случаях

$$G_1 = C_{G_1}(\langle a\rangle) \times \langle u\rangle. \tag{6}$$

Если это не так, то в подгруппе G_1 найдутся хотя бы два базисных элемента h_1 и h_2 такие, что $(\langle h_1\rangle \times \langle h_2\rangle) \notin C_{G_1}(\langle a\rangle)$ и

$$a^{-1}h_1a = h_1a^2, \tag{7}$$

и

$$a^{-1}h_2a = h_2a^2. \tag{8}$$

Из соотношений (7) и (8) немедленно вытекает, что

$$a^{-1}h_1aa^{-1}h_2a = h_1a^2h_2a^2,$$

откуда $a^{-1}h_1h_2a = h_1h_2$, а следовательно, $h_1h_2 \in C_{G_1}(\langle a\rangle)$. Пришли к противоречию. Значит, верно соотношение (6).

Поэтому мы приходим к следующему равенству:

$$G_1\langle a\rangle = R \times (\langle a\rangle \lambda \langle u\rangle),$$

где $uau = a^{-1}$ и $R \times \langle u\rangle \subseteq G_1$. Очевидно подгруппа $R \times \langle a^2\rangle$ является центром группы $G_1\langle a\rangle$, и значит, в силу своей характеристичности нормальна во всей группе G.

Осталось выяснить действие элемента b на элемент u. Поскольку подгруппа $R \times \langle a^2\rangle \times \langle u\rangle$ не является нормальной во всей группе G, то

$$b^{-1}ub = ra, \tag{9}$$

где $r \in R \times \langle a^2\rangle \times \langle u\rangle$. Следовательно, $rara = 1$, откуда $a^{-1}ra = ra^2$, а значит, $a^{-1}rua = ra^2ua^2 = ru$. Таким образом, элемент ru лежит в подгруппе $R \times \langle a^2 \rangle$, а потому $r = tu$, где $t \in R \times \langle a^2 \rangle$. Теперь соотношение (9) равносильно равенству

$$b^{-1} u b = tua,$$

откуда $b^2 u b^2 = b^{-1} t b t u a a^{-1}$, а следовательно,

$$u = b^{-1} t b t u . \tag{10}$$

Соотношение (10), очевидно, равносильно равенству

$$b^{-1} t b = t, \tag{11}$$

т.е. элемент t принадлежит центру $Z(G)$ группы G. Тогда $K = \langle at, b \rangle$ - группа кватернионов с соотношениями: $(at)^4 = 1$, $(at)^2 = a^2 = b^2$, $(at)^{-1} b = b(at)$, $t \in R \times \langle a^2 \rangle$. Далее, непосредственной проверкой легко убедиться, что $(at)^u = (at)^{-1}$, $b^u = (at)b$ и $\langle R, \langle at \rangle \rangle = R \times \langle at \rangle$. Следовательно, G - группа, указанная в п.4 теоремы 2.

Поскольку все случаи рассмотрены, то доказательство настоящего предложения закончено.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. В конечной 2-группе G, разложимой в произведение элементарной абелевой подгруппы и группы кватернионов, всегда существует нормальная элементарная абелева подгруппа, имеющая в G индекс, не превышающий числа 8.

Список литературы

1. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп.- М.: Наука, 1980. - 384 с.
2. Холл М. Теория групп. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 468 с.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1982. - 288 с.