Aleksander W. SPIWAKOWSKIJ

ALGEBRA LINIOWA

Z ZASTOSOWANIEM TECHNOLOGII INFORMACYJNYCH

A.W. Spiwakowskij

Algebra liniowa

z zastosowaniem technologii informacyjnych

WSTĘP

Książka ta jest pomocą naukową z zakresu kursu algebry liniowej. Może być wykorzystana podczas nauczania stosownego rozdziału algebry w uniwersytetach i uniwersytetach pedagogicznych, a także na kursie matematyki wyższej uniwersytetów technicznych. Krąg użytkowników polecanej pomocy naukowej jest szeroki, ponieważ algebra liniowa jest jednym z ważniejszych rozdziałów matematyki oraz dla wielu stosownych teorii i nauk jest jedną z podstawowych dyscyplin matematycznych. Wystarczy przypomnieć, że najważniejsze modele matematyczno-ekonomiczne oraz metody są w istocie liniowe. Dlatego algebra liniowa wchodzi w zakres programu nauczania wielu specjalności.

Pomoc naukowa służy do metodycznego zabezpieczenia procesu nauczania, w którym zajęcia praktyczne z algebry liniowej odbywają się z zastosowaniem techniki komputerowej. Specjalnie w tym celu w katedrze technologii informacyjnych Państwowego Uniwersytetu Chersońskiego opracowano pedagogiczne środowisko programistyczne „Świat algebry liniowej", w którym podstawowe zadania z algebry liniowej są rozwiązywane przez użytkownika „krokowo". Każdy krok oznacza wykonanie jednego z przekształceń. Używanie środowiska programistycznego jest możliwe tylko przy warunku znania przez uczniów algorytmów rozwiązywania zadań z algebry liniowej. Program tylko zwalnia użytkownika z rutynowych obliczeń. Środowisko programistyczne zawiera w sobie również system „Ekspert", do którego można zwracać się w trudnych sytuacjach, w celu otrzymania konsultacji. Oprócz tego, „Ekspert" może krok po kroku zademonstrować uczniowi przebieg rozwiązania zadania, zaczynając w dowolnym momencie, aż do otrzymania odpowiedzi. Kończąc rozwiązanie zadania samodzielnie i zapisując odpowiedź, użytkownik może zwrócić się do „Eksperta" w celu potwierdzenia prawidłowości otrzymanego wyniku. Interfejs użytkownika jest maksymalnie zbliżony do zwykłego: zamiast notowania w zeszycie, specjalne okno, które zostało podzielone na dwie części – Brudnopis i Czystopis. Wszystkie kroki rozwiązania odbywają się w Brudnopisie. Tutaj użytkownik ma możliwość wnoszenia zmian. Wynik rozwiązania i jego pewne ważne etapy uczeń może skopiować do Czystopisu.

Doskonale wiadomo, że rozwiązanie zadań z algebry liniowej jest związane z dużą liczbą standardowych obliczeń arytmetycznych. Realizacja tych obliczeń wymaga posiadania dostatecznego zapasu czasu i odwleka studentów od ważnych momentów algorytmów rozwiązania zadania. Zastosowanie pedagogicznego środowiska programistycznego „Świat algebry liniowej" podczas zajęć praktycznych z algebry liniowej daje umożliwia studentom skupienie się na stronie ideowej badanego materiału, pozwala mu rozwiązać większą liczbę zadań danego typu w ograniczonym czasie, co z kolei, będzie sprzyjać szybszemu i trwalszemu opanowaniu metod i nawyków rozwiązywania zadań. Oprócz tego, środowisko pomoże wykładowcy bardziej efektywnie kontrolować pracę uczniów i rozszerzyć możliwości indywidualnego podejścia do każdego z nich.

Jak wiadomo, praktyczne najbardziej wygodną i efektywną metodą rozwiązania zadań z algebry liniowej jest metoda rugowania zmiennych, która nazywa się metodą Gaussa. Każdy etap przekształcenia macierzy metodą Gaussa może się odbyć przy pomocy pomnożenia tej macierzy z lewej i prawej przez macierz elementarną. Ten system działań środowiska zawiera w sobie następujące polecenia pracy na macierzach: „Dodaj dwa wiersze macierzy", „Pomnóż wiersz przez liczbę", „Dodaj do danego wiersza inny wiersz, pomnożony przez pewną liczbę", „Zamień dwa wiersze miejscami", „Wstaw dodatkowy wiersz zerowy", „Usuń wiersz", „Pomnóż macierz" itd. Niektóre z pokazanych działań przewidziano także dla kolumn macierzy.

Skrócony wariant polecanej pomocy naukowej (w języku ukraińskim) oraz prototyp środowiska „Świat algebry liniowej" (zrealizowany w MS DOS) na przestrzeni wielu lat był stosowany w nauczaniu algebry liniowej w Państwowym Chersońskim Uniwersytecie Pedagogicznym (PCUP) i pokazał swoją efektywność.

Polecany wariant podręcznika jest znacznie rozszerzony i zmodyfikowany. Oprócz tego, zostały do niego dołączone przykłady przestrzeni wektorowych, przykłady operatorów liniowych, ćwiczenia o charakterze teoretycznym oraz układ zadań praktycznych z przykładowymi rozwiązaniami.

Zawartość podręcznika odpowiada programowi algebry oraz teorii liczb dla uniwersytetów oraz uniwersytetów pedagogicznych i technicznych.

W nowej wersji środowiska pedagogicznego „Świat algebry liniowej" (pod Windows) doświadczenie z jego eksploatacji i wykorzystano wszystkie zalety współczesnych technologii interfejsu graficznego, co powoduje, że jest jeszcze bardziej doskonałym pedagogicznym środowiskiem programowym służącym wspomaganiu zajęć praktycznych z algebry liniowej.

Jest jasne, że pierwsze zadanie na dzień dzisiejszy może być rozwiązane tylko przez nauczyciela i komputer w tym przypadku będzie pełnił rolę instrumentu do wspomagania kreowania nowej wiedzy.

Oczywiste jest również i to, że przekazując komputerowi kierowanie rozwiązania drugiego zadania, należy ściśle określać, że produkt programowy powinien w pełni podkreślać „ideologię” kursu teoretycznego.

Interfejs pedagogicznego środowiska programistycznego „Świat algebry liniowej” został utworzony na podstawie następujących zasad:

– użytkownik powinien pracować z realnymi obiektami danego obszaru przedmiotowego (macierzami, układami równań liniowych itp.), a teksty i pytania pojawiają się na ekranie tylko w najbardziej koniecznych przypadkach;

– użytkownik powinien pracować tylko w rzeczywistym systemie operacyjnym, który jest jednoznacznie określony w obszarze przedmiotowym (na przykład dla macierzy: dodać dwa wiersze, pomnożyć wiersz przez liczbę, zamienić dwa wiersze miejscami, pomnożyć macierze itp.);

– interfejs użytkownika powinien być maksymalnie zbliżony do zwykłego (pisanie na kartce zostanie zastąpione oknem na ekranie, przy tym dobrze jest mieć brudnopis, którego nikt nie widzi oraz czystopis dla nauczyciela; w oknie lub oknach znajduje się historia rozwiązania użytkownika w postaci ciągu realnych obiektów nauczanego kursu, według których można poruszać się do przodu lub do tyłu; jeśli pewne obliczenia liczbowe nie posiadają odniesienia do zawartości zadania, to program bierze je na siebie);

– program powinien dawać użytkownikowi szerokie możliwości działania w ramach obszaru przedmiotowego (na przykład na macierzy można dokonywać przekształceń elementarnych w dowolnej kolejności, głównie znaleźć jej rząd), to znaczy użytkownik nie powinien znajdować się pod brzemieniem algorytmu rozwiązania, określonego w stadium napisania środowiska programowo-pedagogicznego (ŚPP). Przy tym użytkownik powinien mieć możliwość przemieszczania się po swoich działaniach, wstawiając pomiędzy nie nowe. Użytkownik powinien zawsze mieć wyjście z kłopotliwego położenia, w ŚPP może być zrealizowane przez tak zwanego eksperta, który będzie umiał teoretycznie wyjaśnić każdy krok, rozpoczynając od tego, w którym znajduje się użytkownik, oraz stosując tylko określone środowisko operacyjne, pokazując w postaci filmu animowanego rozwiązanie postawionego zadania. Przy tym można mu, w odróżnieniu od nauczyciela, w dowolnym momencie przerwać i kontynuować rozwiązanie samodzielnie;

– historia pracy użytkownika powinna być przedstawiona w postaci kolejności jego działań, a przy chęci zakończenia pracy może pojawić się informacja, która analizowałaby wyniki jego działań.

OKREŚLENIE 1.1

Układem równań liniowych nad ciałem F ze zmiennymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywa się układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

OKREŚLENIE 1.2

Rozwiązaniem układu równań liniowych (1.1) nazywa się uporządkowany zbiór elementów ciała F $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in F^n$, których podstawienie zamiast zmiennych w równaniu układu przekształca wszystkie równania tego układu w równości.

Zatem, jeśli $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ – rozwiązania układu (1.1.), to spełnione są równości:

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \ldots + a_{in}\lambda_n = b_i \text{, i = 1, 2, ..., m.}$$

Elementy ciała F przyjęto nazywać skalarami lub liczbami, a uporządkowane zbiory skalarów – wektorami.

UWAGA

W rozdziale 2 określimy ogólne pojęcie przestrzeni wektorowej jako zbioru wektorów, który spełnia określone własności – aksjomaty przestrzeni wektorowej. Podamy również przykłady konkretnych przestrzeni wektorowych. Jedną z nich jest tak zwana arytmetyczna przestrzeń wektorowa. Elementami tej przestrzeni są uporządkowane zbiory skalarów.

OKREŚLENIE 1.3

Układ równań liniowych nazywa się oznaczonym, jeśli posiada jedno rozwiązanie. Układ równań liniowych nazywa się sprzecznym jeśli nie posiada rozwiązania.

OKREŚLENIE 1.4

Dwa układy równań liniowych nazywa się równoważnymi, jeśli każde rozwiązanie jednego z nich jest rozwiązaniem drugiego, to znaczy, gdy w zbiorze D oba równania mają te same rozwiązania.

Wiele praktycznych zadań sprowadza się do rozwiązania układów równań liniowych. Metody rozwiązywania układów równań liniowych z dwoma i trzema zmiennymi były nauczane w trakcie kursów geometrii analitycznej. Obecnie rozszerzymy te metody na dowolne układy równań liniowych.

1.1 Przekształcenia równoważne układów równań liniowych

Rozwiązując równania lub układy równań, zwykle stosuje się tak zwane przekształcenia równoważne, to znaczy takie przekształcenia równania lub układu równań, które nie zmieniają zbioru rozwiązań. Cel przekształceń polega na tym, aby uprościć równanie lub układ równań. Dla układów równań liniowych można wskazać trzy typy takich przekształceń: *przestawienie (permutacja)* równań, *przekształcenia elementarne* równań, *mnożenie* równań przez niezerowy skalar.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \sim \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.2)$$

Przestawienie P_{ij} równań układu – to zamiana miejscami i-go i j-go równań w układzie (1.2).

LEMAT 1.1

Przestawienie równań układu jest równoważne z przekształceniem tego układu.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \sim \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{i1}x_1 + a'_{i2}x_2 + \ldots + a'_{in}x_n = b'_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.3)$$

Przekształceniem elementarnym $F_{ij}(\lambda)$ układu nazywa się przekształcenie i-tego równania tego układu według wzorów:

$$a'_{ik} = a_{ik} + \lambda \cdot a_{jk}, \quad b'_i = b_i + \lambda \cdot b_j, \; k = 1,2,\ldots,n, \quad i \neq j. \qquad (1.4)$$

LEMAT 1.2

Jeśli $i \neq j$, to elementarne przekształcenie $F_{ij}(\lambda)$ układu równań liniowych jest przekształceniem równoważnym tego układu.

Dowód.

Rozpatrzymy dowolne rozwiązanie $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ układu – lewej części przekształcenia (1.3). Podstawimy ten wektor do prawej części przekształcenia (1.3). Ponieważ w tej części zmieniło się tylko i-te równanie, wystarczy wykazać, że równanie te, również przekształciło się w równość.

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} \cdot x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + \lambda \cdot a_{jk}) \cdot x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot a_{jk} \cdot x_k =$$

$$b_i + \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot x_k = b_i + \lambda \cdot b_j = b'_i$$

W taki sposób można dowieść, że dowolne rozwiązanie układu –prawej części przekształcenia jest również rozwiązaniem układu – lewej części przekształcenia (1.3).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \sim \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \ldots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.5)$$

LEMAT 1.3

Pomnożenie $M_i(\lambda)$ i-go równania układu przez niezerowy skalar jest równoważne przekształceniu tego układu.

UWAGA

Dla każdego z przekształceń równoważnych, które określiliśmy, łatwo można utworzyć przekształcenie odwrotne do danego. W ten sposób, kolejnych przekształceń równoważnych można dokonywać w tym lub odwrotnym kierunku.

1.2 Algorytm rugowania zmiennych

Przy pomocy przekształceń równoważnych układu można przejść do układu, w którym jedna ze zmiennych, na przykład x_1, będzie tylko w pierwszym równaniu układu. W ten sposób, po przekształceniu układ równań liniowych będzie miał postać

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (1.6)$$

W tym celu należy:

1. Znaleźć w układzie (1.1) równanie, które zawiera zmienną x_1 i przestawić go na pierwsze miejsce.
2. Pomnożyć pierwsze równanie układu (1.1) przez skalar $1/a_{11}$, przekształcając, w ten sposób, współczynnik przy x_1 na 1. W wyniku otrzymamy pierwsze rozwiązanie układu (1.6).
3. Każde z równań, zaczynając od drugiego, przekształcimy w taki sposób, aby wykluczyć z niego zmienną x_1 przy pomocy przekształcenia elementarnego $F_{i1}(\lambda_i)$. Dla i-go równania układu należy dokonać przekształcenia $F_{i1}(-a_{i1})$. Wzory (1.4) pokazują, że dla $\lambda_i = -a_{i1}$ współczynniki a'_{i1} przy zmiennej x_1 w równaniach od drugiego do n-go wynoszą zero.

Algorytm wykluczenia zmiennej sprowadza zadanie rozwiązania początkowego m × n układu równań liniowych do zadania rozwiązania układu z m-1 równaniami z n-1 zmiennymi. Istotnie, jeśli otrzyma się rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (1.7)$$

to wartość zmiennej x_1 można obliczyć z pierwszego równania:

$$x_1 = b'_1 - a'_{12}x_2 - \ldots - a'_{1n}x_n \qquad (1.8)$$

Kontynuując rugowanie zmiennych $x_2, \ldots, x_n$, jeśli to możliwe, przejdziemy do układu równoważnego, który posiada prostszą postać, niż układ (1.1). Układ taki jest już wystarczająco prosty w rozwiązaniu, jak i badaniu go na zbieżność.

1.3 Macierz układu równań liniowych.

Ponieważ konkretne nazwy zmiennych układu równań liniowych nie pełnią żadnej roli, to układowi można przyporządkować odpowiednio, prostokątną tablicę składającą się ze współczynników tego układu, w taki sposób, że:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

Takie prostokątne tablice w matematyce nazywa się macierzami. Dlatego będziemy mówić o macierzy (1.9) układu (1.1).
Przy tym należy rozróżniać podstawową część macierzy układu, która zawiera współczynniki przy zmiennych układu oraz ostatnią kolumnę macierzy, która zawiera wyrazy wolne układu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Macierz *A* nazywa się podstawową macierzą układu, *B* – kolumną wyrazów wolnych. Macierz (1.9) układu, nazywa się rozszerzoną macierzą układu. Macierz rozszerzoną *U* otrzymuje się z *A,* oraz dodania do niej kolumny wyrazów wolnych *B*.

1.4 Przekształcenia macierzy.

Każdemu z równoważnych przekształceń układu równań liniowych można przypisać odpowiednie przekształcenie macierzy U, *które* wykonuje się na jej wierszach. W tym celu należy tylko przypisać każdemu wierszowi macierzy odpowiednie równanie układu i „przetłumaczyć" określenie przekształceń równoważnych na język przekształceń wierszy macierzy rozszerzonej układu.

- Przestawienie równań układu odpowiada przestawieniu wierszy macierzy U.
- Elementarne przekształcenie równań układu zgodnie ze wzorami (1.4) odpowiada elementarnemu przekształceniu wierszy macierzy U z tymi samymi wzorami.
- Pomnożenie równania przez niezerowy skalar (element po elemencie), odpowiada pomnożeniu wiersza przez ten skalar (patrz: (1.5)).

Algorytm wykluczenia (rugowania) zmiennych z układu równań liniowych, w istocie jest algorytmem przekształcenia macierzy U postaci:

$$U^{'} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1r} & a_{1r+1} ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & ... & a_{2r} & a_{2r+1} ... & a_{1n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{r-1r} & a_{r-1r+1} ... & a_{r-1n} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & a_{rr+1} ... & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0... & 0 & b_{r+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0... & 0 & b_m \end{bmatrix}$$

Macierz $U^{'}$ została otrzymana w wyniku wykluczenia r zmiennych, przy czym dalsze stosowanie algorytmu wykluczenia zmiennej jest niemożliwe. Przyczyna leży w tym, że wiersze macierzy podstawowej z $U^{'}$ są zerowe, to znaczy, że nie można wykonać punktu 1 algorytmu – znalezienia niezerowego współczynnika przy zmiennej.

Analizując macierz $U^{'}$, można wysunąć wnioski o zbieżności układu (1.1) i liczbie rozwiązań.

OKREŚLENIE 1.5

Liczba r niezerowych wierszy macierzy podstawowej $A^{'}$ macierzy $U^{'}$ nazywa się rzędem układu równań liniowych (1.1).

TWIERDZENIE1.1.

Jeśli rząd układu jest równy liczbie jego zmiennych, to układ posiada jedno rozwiązanie.

W tym przypadku wartość zmiennych można obliczyć, rozpoczynając od ostatniego równania i zmiennej x_n

TWIERDZENIE 1.2.

Jeśli rząd układu jest mniejszy od liczby jego zmiennych, a przynajmniej dla jednego z wierszy macierzy U' o numerach r+1, …, m element kolumny wyrazów wolnych b_j nie jest równy zero, to układ (1.1) jest nieoznaczony.

Dowód.

Jeśli j-ty wiersz macierzy U' ma postać $\left|0\ 0\ \ldots\ 0\ b_j\right|$, przy czym $b_j \neq 0$, to oznacza, że jedno z równań układu przekształciło się w równość sprzeczną $0 = b_j$, dlatego i układ (1.1) jest sprzeczny, to znaczy nieoznaczony.

TWIERDZENIE 1.3.

Jeśli rząd układu jest mniejszy od liczby jego zmiennych i wszystkie wiersze o numerach r+1, …, m są zerowe, (to znaczy $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$) to układ (1.1) posiada wiele rozwiązań.

Dowód tego twierdzenia przedstawiono niżej (twierdzenie 1.7).

WNIOSEK1.1

Zerowe wiersze macierzy U' można wydzielić z tej macierzy. W rzeczy samej wiersz zerowy odpowiada równaniu 0 = 0, które jest tożsamością.

1.5 Jednorodne układy równań liniowych

OKREŚLENIE 1.6

Układ równań liniowych nazywa się jednorodnym, jeśli wyrazy wolne wszystkich jego równań są równe zeru.
Stąd jednorodny układ równań liniowych ma następującą postać:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Jednorodny układ równań liniowych zawsze jest oznaczony, ponieważ posiada rozwiązanie:

$X_k = 0$, k = 1, …, n.

Rozwiązanie to nazywa się zerowym lub trywialnym.

TWIERDZENIE 1.6

Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych spełnia następujące właściwości;
1. Jeśli $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – dwa dowolne wektory – rozwiązania układu (1.10), to $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ – także rozwiązanie tego układu.
2. Jeśli $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – dowolny wektor – rozwiązanie układu (1.10), i γ – dowolny element ciała skalarów F, to $\gamma \cdot \bar{a} = (\gamma \cdot \alpha_1, \ldots, \gamma \cdot \alpha_n)$ – także rozwiązanie tego układu.

Dowód

1. Podstawimy do dowolnego (i-go) równania układu 1.10 zamiast wektora zmiennych wektor $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ i otworzymy nawiasy:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j$$

Ponieważ wektory $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ są rozwiązaniami układu, obie sumy $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j$ są równe zeru. Zatem,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j + \beta_j) = 0 .$$

2. Dowód absolutnie analogiczny do poprzedniego.

Wcześniej definiowaliśmy pojęcie elementarnego przekształcania układu równań liniowych i mnożenia równania liniowego przez liczbę. Przekształcenia te można zdefiniować przy pomocy *operacji* dodawania równań poszczególnymi członami oraz mnożenia równania przez skalar. Przekształceniem równoważnym układu równań odpowiadają przekształcenia wierszy macierzy, składającej się ze współczynników równań liniowych. Przekształcenia te należy naturalnie także traktować jako *operacje* dodawania wektorów-wierszy oraz mnożenia wektora-wiersza przez liczbę. W końcu, w twierdzeniu 1.6 określono własności, które można również sformułować jako terminy *operacji* dodawania i mnożenia przez skalar wektorów-rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych.

Zatem, zdefiniujemy na zbiorze wektorów z F^n dwa działania algebraiczne – operacje dodawania i mnożenia przez skalar: jeśli

$\overline{a} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\overline{b} = (\beta_1, ..., \beta_n)$, to zgodnie z definicją

$$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$$

$$\gamma \cdot \overline{a} = (\gamma \cdot \alpha_1, ..., \gamma \cdot \alpha_n)$$

Twierdzenie 1.6 można teraz sformułować następująco:

Zbiór rozwiązań układu jednorodnych równań liniowych jest zamknięty względem operacji dodawania i mnożenia przez skalar.

WNIOSEK 1.2

Jeśli $\overline{a}_1, ..., \overline{a}_k$ – dowolne wektory-rozwiązania układu (1.10) i $\alpha_1, ..., \alpha_k$ – dowolne skalary, to wektor $\overline{b} = \alpha_1 \overline{a}_1 + ... + \alpha_k \overline{a}_k$ – również jest rozwiązaniem układu (1.10).

OKREŚLENIE 1.7

Wektor $\overline{b} = \alpha_1 \overline{a}_1 + ... + \alpha_k \overline{a}_k$ nazywa się liniową kombinacją wektorów $\overline{a}_1, ..., \overline{a}_k$.

To znaczy, że dowolna liniowa kombinacja wektorów-rozwiązań układu (1.10) $\overline{a}_1, ..., \overline{a}_k$ także jest rozwiązaniem (1.10).

Dla układu (1.10) utworzymy jego macierz podstawową (macierz współczynników) i zastosujemy w niej algorytm rugowania zmiennych.

UWAGA

Ponieważ kolumna wyrazów wolnych układu (1.10) jest zerowa, to można nie włączać jej do macierzy, dlatego tworzymy macierz nie rozszerzoną, a podstawową.

Poprzez przestawienie kolumn macierzy, które oznacza przestawienie nazw zmiennych układu równań liniowych, można doprowadzić macierz do postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & ... & a_{1r} & a_{1r+1} & ... & a_{1n} \\ 0 & 1 & ... & a_{2r} & a_{2r+1} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{rr+1} & ... & a_{rn} \end{bmatrix} \qquad (1.11)$$

Takie macierze nazywa się stopniowanymi. Elementy macierzy stopniowanych, znajdujące się pod główną przekątną (diagonalą) wynoszą zero.

Dokonamy jeszcze jednego przekształcenia tej macierzy. Naszym celem będzie otrzymanie zer również ponad przekątną.

Algorytm doprowadzenia macierzy do postaci diagonalnej

Używając ostatniego wiersza (k = r), tak jak robiliśmy to w pkt.3 algorytmu rugowania zmiennych, wykluczymy z równań o numerach k-1, …, 1 zmienną x_k, to znaczy, przekształcimy elementy k-tej kolumny w zera: $a_{r-1r} = a_{r-2r} = ... = a_{1r} = 0$.

Analogicznie zrobimy z innymi wierszami, przekształcając kolejno w zera wszystkie elementy macierzy znajdujące się ponad główną przekątną. W rezultacie otrzymamy macierz postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a_{1r+1} & ... & a_{1n} \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_{2r+1} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{rr+1} & ... & a_{rn} \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

Układ, który odpowiada tej macierzy, ma postać:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + ... + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.13)$$

Dla wygody analizy przeniesiemy w każdym równaniu wyrazy ze zmiennymi x $_{r+1}$, …, x_n do prawej części równań. Otrzymamy:

$$\begin{cases} x_1 = -a_{1r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ .... \\ x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (1.13')$$

Zwróćmy uwagę, że aby otrzymać rozwiązanie układu (1.13), to zmiennym x_{r+1}, ... x_n można przypisać dowolne wartości. Wtedy wartość zmiennych x_1, ..., x_r można obliczyć z (1.13) dla wartości x_{r+1}, ... x_n.

TWIERDZENIE 1.7

Jeśli rząd układu (1.10) r jest równy liczbie jego zmiennych n, to układ posiada tylko jedno rozwiązanie zerowe.

Jeśli r < n, to układ (1.10) posiada także rozwiązania niezerowe. W szczególności, jeśli pole skalarów F jest nieskończone, układ posiada nieskończoną liczbę rozwiązań.

Przeanalizujemy teraz przypadek, gdy r < n, bardziej szczegółowo.

OKREŚLENIE1.8

Zmienne x_{r+1}, ... x_n nazywają się niezależnymi. Zmienne x_1, ... x_r nazywają się zależnymi (od x_{r+1}, ... x_n).

OKREŚLENIE1.9

Rozwiązanie jednorodnego układu równań liniowych (1.10), które otrzymano dla wartości zmiennych niezależnych

$$x_{r+1} = 0,\ ...,\ x_{j-1} = 0,\ x_j = 1,\ x_{j+1} = 0,\ ...,\ x_n = 0$$

nazywa się fundamentalnym.

Innymi słowy, fundamentalne rozwiązanie układu (1.10) można otrzymać, jeśli doprowadzi się jedną z niezależnych zmiennych do równości z 1, a pozostałe zmienne niezależne będą zerami.

W ten sposób, układ (1.10) posiada komplet n-r rozwiązań fundamentalnych. Będziemy go nazywać układem rozwiązań fundamentalnych. Z definicji wynika, że każde rozwiązanie fundamentalne układu jest niezerowe.

TWIERDZENIE 1.8

Wektor y jest rozwiązaniem układu (1.10) wtedy i tylko wtedy, gdy można go przedstawić w postaci liniowej kombinacji wektorów – fundamentalnych rozwiązań układu (1.10)

$$y = \alpha_1 x_{r+1} + ... + \alpha_{n-r} x_n \qquad (1.14)$$

Dowód.

Rozpatrzymy układ rozwiązań fundamentalnych x_1, ..., x_{n-r} układu (1.10). Wybierzemy n-r skalarów α_1, ..., α_{n-r} i zestawimy kombinację liniową $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x_1} + ... + \alpha_{n-r}\mathbf{x_{n-r}}$. Wykażemy, że y jest rozwiązaniem (1.13). Ponieważ układ (1.13) jest równoważny układowi (1.10), tym samym zostanie wykazane, że y jest rozwiązaniem (1.10). Zasadniczo dowód będziemy przeprowadzać metodą indukcji matematycznej zgodnie z liczbą rozwiązań fundamentalnych.

Baza indukcji (n-r = 1).

Zgodnie z twierdzeniem 1.6: jeśli x_1 – rozwiązanie (1.13), to także $\alpha_1\mathbf{x_1}$ – również rozwiązanie (1.13).

Krok indukcji *(n-r = m+1).*

Jeśli $\boldsymbol{y}' = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_{n-r}\boldsymbol{x}_m$ – rozwiązanie (1.13), i

$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_{n-r}\boldsymbol{x}_m + \alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1}$, to $\boldsymbol{y} = y' + \alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1}$.

Ponieważ $\boldsymbol{x}_{m+1}$ – rozwiązanie (1.13), to również $y'' = \alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1}$ – rozwiązanie tego układu. Dlatego $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y}''$ zgodnie z twierdzeniem 1.6 $\boldsymbol{y}$ także jest rozwiązaniem (1.13).

Wykażemy teraz, że dla dowolnego rozwiązania $\boldsymbol{y}$ układu (1.13) istnieją takie skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$, że $y = \alpha_1 x_{r+1} + \ldots + \alpha_n x_n$.

Zakładamy $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ i podstawiamy te wartości do układu (1.13').

$$\begin{cases} \beta_1 = -a_{1r+1}\beta_{r+1} - \ldots - a_{1n}\beta_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_r = -a_{rr+1}\beta_{r+1} - \ldots - a_{rn}\beta_n \end{cases}$$

Z drugiej strony, obliczymy wektory – rozwiązania fundamentalne:

$$x_{r+1} = (-a_{1r+1}, \ldots, -a_{rr+1}, 1, 0, \ldots, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.15)$$
$$x_n = (-a_{1n}, \ldots, -a_{rn}, 0, 0, \ldots, 1)$$

Otóż, nietrudno zauważyć, że wzór (1.14) jest aktualny, jeśli założyć $\alpha_1 = \beta_{r+1}, \ldots, \alpha_r = \beta_n$

UWAGA

Porównując wzory (1.15) oraz macierz diagonalną (1.12), można zauważyć, że układ rozwiązań fundamentalnych (1.10) w istocie jest zapisany w ostatnich *n* – *r* kolumnach tej macierzy. Dlatego algorytm diagonalizacji jest w istocie, algorytmem poszukiwania fundamentalnego układu rozwiązań układu jednorodnego, który jest przedstawiony w postaci macierzy trójkątnej (1.12). Dlatego ogólny algorytm tworzenia układu rozwiązań fundamentalnych jednorodnego układu równań liniowych (1.10) polega na utworzeniu macierzy (1.12) najpierw przy pomocy algorytmu rugowania zmiennych, a potem – algorytmu diagonalizacji.

1.6 Ogólne rozwiązanie układu równań liniowych

TWIERDZENIE 1.9.

Niech $\overline{x}_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\overline{x}_2 = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ - dwa rozwiązania układu (1.1). Wówczas $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = (\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \ldots, \lambda_n - \mu_n)$ będzie rozwiązaniem układu jednorodnego (6.7).

Dowód:

Zgodnie z definicją rozwiązywania równań liniowych.

TWIERDZENIE 1.10.

Jeśli $\overline{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ – rozwiązanie układu (1.1), a $\overline{y} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ – rozwiązanie układu (1.10), to

$$\overline{x} + \overline{y} = (\lambda_1 + \gamma_1, \lambda_2 + \gamma_2, \ldots, \lambda_n + \gamma_n)$$

będzie rozwiązaniem układu jednorodnego (1.10).

Dowód

Zgodnie z definicją rozwiązywania równań liniowych.

WNIOSEK

Z ostatnich dwóch twierdzeń wynika, że rozwiązanie układu równań liniowych (1.1) można otrzymać jako sumę dowolnego rozwiązania tego układu oraz dowolnego rozwiązania odpowiedniego układu jednorodnego (1.10).

Algorytm rozwiązania układu równań liniowych

1. Utworzyć macierz rozszerzoną $\boldsymbol{U}$ układu równań liniowych.
2. Przy pomocy algorytmu rugowania zmiennych utworzyć macierz trójkątną $\boldsymbol{U}'$.
3. Określić oznaczoność układu. Jeśli układ jest nieoznaczony, to zakończyć rozwiązywanie zadania.
4. Jeżeli układ jest oznaczony, to określić liczbę jego rozwiązań.

5. Jeżeli układ posiada jedno rozwiązanie, to sprowadzić macierz $\boldsymbol{U}'$ do postaci diagonalnej $\boldsymbol{U}''$. Wartość elementów ostatniej kolumny jest rozwiązaniem układu.
6. Jeśli układ posiada więcej rozwiązań, to należy:
   - wykluczyć z macierzy $\boldsymbol{U}'$ zerowe wiersze (jeśli istnieją);
   - sprowadzić macierz $\boldsymbol{U}'$ do postaci diagonalnej $\boldsymbol{U}''$. Wartość elementów ostatniej kolumny jest cząstkowym rozwiązaniem układu $\overline{y}$;
   - Określić rząd r układu. Wartość elementów n-r kolumn prostokątnej części macierzy $\boldsymbol{U}''$ zastosować do utworzenia fundamentalnego układu rozwiązań odpowiedniego układu jednorodnego $\overline{x}_1,...,\overline{x}_{n-r}$;
   - Przedstawić główne rozwiązanie układu w postaci
   $$\overline{X} = \overline{y} + \alpha_1 \overline{x}_1 + ... + \alpha_{n-r} \overline{x}_{n-r}$$
   z nieokreślonymi współczynnikami $\alpha_1,...,\alpha_{n-r}$.

UWAGI KOŃCOWE

Wiele zadań praktycznych algebry liniowej sprowadza się do rozwiązania układów równań liniowych. Dlatego też, praktyczne metody, przedstawione w tym rozdziale, są niezbędne w dalszej pracy. Ćwiczenia na zastosowanie algorytmów tego rozdziału zawarte są w końcowym rozdziale 11.

Z drugiej strony, w rozdziale 6 rozpatrujemy jeszcze raz układy równań liniowych, formułując wyniki o strukturze ich rozwiązania językiem przestrzeni wektorowych.

W tym rozdziale posługiwaliśmy się terminami algebry liniowej: *skalar, wektor, macierz, kombinacja liniowa* i inne. Definicje tych pojęć zostaną przytoczone w dalszej części.

Rozdział2. Przestrzenie wektorowe

Współczesne podejście do określenia przestrzeni wektorowej, jak i do praktycznie wszystkich współczesnych pojęć matematycznych, jest abstrakcyjne. Przestrzenie wektorowe są określone własnymi właściwościami. Te właściwości w istocie są aksjomatami. Teoria przestrzeni wektorowych opiera się tylko na tych właściwościach aksjomatycznych. W praktyce oczywiście (to znaczy podczas rozwiązywania zadań praktycznych), matematyk ma do czynienia z konkretnymi realizacjami pojęć abstrakcyjnych (aksjomatycznych). Dla algebry liniowej oznacza to, że zadania praktyczne należy rozwiązywać pracując z konkretnymi przykładami przestrzeni wektorowych.

2.1. Określenie przestrzeni wektorowej

Niech dane jest ciało F i niepusty zbiór V. Elementy ciała F będziemy oznaczać literami greckimi α, β, γ, ..., oraz nazywać skalarami. Elementy zbioru V będziemy nazywać wektorami i oznaczać małymi literami łacińskimi z kreską (strzałką) u góry: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$

Przypuśćmy, że na zbiorze V określono działanie (operację) dodawania wektorów, to znaczy dla każdej pary wektorów $\overline{a} \in V$, $\overline{b} \in V$ istnieje trzeci wektor $\overline{c} \in V$, który nazywa się sumą wektorów $\overline{a}$ i $\overline{b}$. Operację dodawania będziemy oznaczać symbolem "+" i zapisywać wynik dodawania w postaci: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$. Przypuśćmy także, że określono działanie mnożenia skalarów ciała F przez wektory zbioru V tak, że otrzymany w wyniku mnożenia element ponownie należy do V, to znaczy, jest wektorem. Jeśli $\alpha \in F$, $\overline{a} \in V$, to iloczyn α i wektora $\overline{a}$ będziemy zapisywać w postaci $\alpha * \overline{a}$ lub $\alpha\overline{a}$.

OKREŚLENIE 2.1.

Niepusty zbiór V z określonymi powyżej działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez skalary ciała F nazywa się przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem F, jeśli spełnione są następujące warunki:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;
2) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;
3) w zbiorze V istnieje wektor zerowy, który oznacza się jako $\overline{0}$ i który posiada następującą własność: dla dowolnego wektora $\overline{a} \in V$, $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;
4) dla każdego wektora $\overline{a} \in V$ istnieje przeciwny wektor, który oznacza się poprzez $(-\overline{a})$, i który w sumie z wektorem $\overline{a}$ daje wektor zerowy: $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;
5) $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$;
6) $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$;
7) $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$;
8) $1\overline{a} = \overline{a}$, dla dowolnego wektora $\overline{a} \in V$.

Warunki 1–4 oznaczają, że przestrzeń wektorowa V jest grupą przemienną (abelową) względem działania dodawania wektorów.

Sumę wektora $\overline{a}$ i wektora przeciwnie skierowanego do wektora $\overline{b}$, będziemy nazywać różnicą wektorów $\overline{a}$ i $\overline{b}$, i oznaczać $\overline{a} - \overline{b}$.

2.2 Właściwości przestrzeni wektorowych

1) Jeśli $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$, to $\overline{a} = \overline{c} - \overline{b}$ (składniki można przenosić z jednej strony na drugą ze znakiem przeciwnym).

Dowód:

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$, dlatego $(\overline{a} + \overline{b}) + (-\overline{b}) = \overline{c} + (-\overline{b})$, $\overline{a} + (\overline{b} + (-\overline{b})) = \overline{c} - \overline{b}$, $\overline{a} + \overline{0} = \overline{c} - \overline{b}$, $\overline{a} = \overline{c} - \overline{b}$.

2) $-(-\overline{a}) = \overline{a}$.

Dowód:

$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$, stąd $(-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0}$, więc $\overline{a}$ jest wektorem przeciwnie skierowanym do wektora $-\overline{a}$, to znaczy $\overline{a} = -(-\overline{a})$.

3) $0\overline{a} = \overline{0}$ dla dowolnego $\overline{a} \in V$.

Dowód:

$\bar{a} = 1\bar{a}$ (na skutek warunku 8 określenia 1.1). Dlatego $\bar{a} = 1\bar{a} = (1+0)\bar{a} = 1\bar{a} + 0\bar{a} = \bar{a} + 0\bar{a}$, stąd $\bar{a} = \bar{a} + 0\bar{a}$, lub $\bar{a} + (-\bar{a}) = 0\bar{a}$, $\bar{0} = 0\bar{a}$.

4) $(-\alpha)\bar{a} = -(\alpha\bar{a})$; w szczególności $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$.

Dowód:

$\bar{0} = 0\bar{a}$ (wł.3); stąd $\bar{0} = 0\bar{a} = (\alpha + (-\alpha))\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\alpha)\bar{a}$, oznacza, że $(-\alpha)\bar{a} = -(\alpha\bar{a})$

5) $(\alpha - \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} - \beta\bar{a}$.

Dowód:

$(\alpha - \beta)\bar{a} = (\alpha + (-\beta))\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + (-\beta\bar{a}) = \alpha\bar{a} - \beta\bar{a}$.

6) $\alpha(-\bar{b}) = -\alpha\bar{b}$.

Dowód:

$\alpha(-\bar{b}) = \alpha((-1)\bar{b}) = ((-1)\alpha)\bar{b} = (-\alpha)\bar{b} = -\alpha\bar{b}$

7) $\alpha(\bar{a} - \bar{b}) = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{b}$.

Dowód:

$\alpha(\bar{a} - \bar{b}) = \alpha(\bar{a} + (-\bar{b})) = \alpha\bar{a} + \alpha(-\bar{b}) - = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{b}$

8) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ dla dowolnego $\alpha \in F$.

Dowód:

$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{a} - \bar{a}) = \alpha\bar{a} + \alpha(-\bar{a}) = \alpha\bar{a} - \alpha\bar{a} = \bar{0}$

9) Jeśli $\alpha\bar{a} = \bar{0}$, to albo $\alpha = 0$, albo $\bar{a} = \bar{0}$.

Dowód:

Jeżeli $\alpha \neq 0$, to na ciele F istnieje odwrotny skalar α^{-1}. Dlatego $\alpha^{-1}(\alpha\bar{a}) = (\alpha^{-1}\alpha)\bar{a} = 1\bar{a} = \bar{a}$, z drugiej strony $\alpha^{-1}\bar{0} = \bar{0}$, to znaczy $\bar{a} = \bar{0}$.

10) Metodą indukcji matematycznej łatwo udowodnić, że

$$\alpha(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \ldots + \bar{a}_n) = \alpha\bar{a}_1 + \alpha\bar{a}_2 + \alpha\bar{a}_3 + \ldots + \alpha\bar{a}_n;$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)\bar{a} = \alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{a} + \alpha_3\bar{a} + \ldots + \alpha_n\bar{a}.$$

2.3. Przykłady przestrzeni wektorowych

Przykład 2.1 Warstwy

Niech Q – ciało liczb wymiernych i $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – uporządkowany zbiór zmiennych. Warstwą nazywa się wyrażenie postaci $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, gdzie α_i – dowolne liczby wymierne (to znaczy $\alpha_i \in Q$), a $x_i \in X$. Przez W oznaczymy zbiór wszystkich warstw o współczynnikach z ciała Q:

$$W = \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \mid \alpha_i \in Q, x_i \in X\}$$

W zbiorze W określimy działania dodawania warstw i mnożenia warstwy przez skalar – liczbę z ciała Q w następujący sposób:
Jeśli $L_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, $L_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ to

$$L_1 + L_2 = (\alpha_1 + \beta_1)x1 + (\alpha_2 + \beta_2) x_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)x_n \text{ (dodawanie)}$$

$$\gamma * L_1 = (\gamma * \alpha_1)x_1 + (\gamma * \alpha_2)x_2 + \ldots + (\gamma * \alpha_n)x_n \text{ (mnożenie przez skalar)}$$

Oznaczenia te można sformułować jako zasady obliczania w następujący sposób:

Aby dodać dwie warstwy, należy dodać współczynniki tych warstw przy odpowiednich zmiennych.

Aby pomnożyć warstwę przez skalar, należy pomnożyć wszystkie współczynniki tej warstwy przez skalar.

Aby się upewnić, że zbiór W z określonymi działaniami dodawania warstw oraz mnożeniem warstwy przez skalar, jest przestrzenią wektorową, należy sprawdzić, czy wszystkie równości określenia 1.1 są tożsamościami w zbiorze W.

1) Przemienność operacji dodawania jest następstwem przemienności operacji dodawania liczb wymiernych.
2) Łączność operacji dodawania jest skutkiem łączności operacji dodawania liczb wymiernych.
3) Istnienie wektora zerowego. Oczywiście, wektorem zerowym jest warstwa z zerowymi współczynnikami:

$$L_0 = 0*x_1 + 0*x_2 + \ldots + 0*x_n$$

4) Istnienie wektora przeciwnego. Przeciwną warstwą do warstwy $L = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n$ jest warstwa $L^- = (-\alpha_1)x_1+(-\alpha_2)x_2 + \ldots + (-\alpha_n)x_n$, której współczynniki są przeciwne do odpowiednich współczynników warstwy L.

Własności 1)–5) pokazują, że zbiór W jest grupą abelową względem operacji dodawania warstw. Następne własności odnoszą się do działania mnożenia warstwy przez skalar.

5) Własność $\alpha(L_1 + L_2) = \alpha L_1 + \alpha L_2$ nazywa się rozdzielnym prawem mnożenia przez skalar względem dodawania. Rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania jest również prostym następstwem rozdzielności na ciele liczb wymiernych. Istotnie, wykażemy ją dla i-tych wyrazów warstw L_1 i L_2 gdzie i – dowolny numer:

$$\alpha(\alpha_ix_i + \beta_ix_i) = \alpha(\alpha_i + \beta i)x_i = (\alpha*\alpha_i + \alpha*\beta_i)x_i = (\alpha*\alpha_i)xi + (\alpha*\beta_i)x_i$$

6) Własność $(\alpha+\beta)L = \alpha L + \beta L$ nazywa się prawem rozdzielności mnożenia przez skalar względem dodawania skalarów. Dowód tej własności jest w pełni analogiczny do poprzedniego.
7) Własność $\alpha(\beta L) = (\alpha\beta)L$ nazywa się łącznością mnożenia przez skalar. Dowód tej własności także jest analogiczny do dowodu7).
8) Na koniec, własność $1_Q*L = L$ oznacza, że jednostka ciała Q jest neutralnym elementem operacji mnożenia przez skalar.

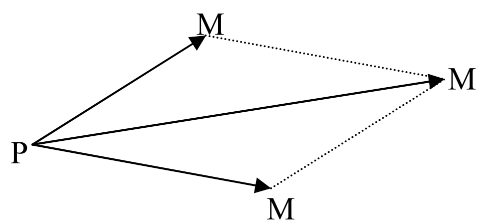
Przykład 2.2 Odcinki skierowane na płaszczyźnie

Niech R – ciało liczb rzeczywistych. Zaznaczymy na płaszczyźnie geometrycznej Π punkt P. Rozpatrzymy zbiór S wszystkich odcinków skierowanych tej płaszczyzny w postaci PM, gdzie P – zaznaczony punkt, a M – dowolny punkt płaszczyzny.

$$S = \{PM \mid M \in \Pi\}$$

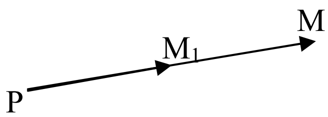
W zbiorze S określimy działania dodawania odcinków skierowanych oraz mnożenia odcinka skierowanego przez skalar – liczbę z ciała R w następujący sposób:

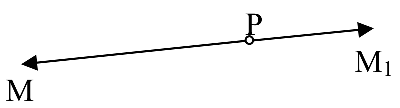
Jeżeli $s_1 = PM_1$, $s_2 = PM_2$ to $s = s_1 + s_2 = PM_1 + PM_2$ – odcinek skierowany PM, który jest przekątną równoległoboku, utworzonego na odcinkach PM1 i PM2 jako bokach, które wychodzą z punktu P (reguła równoległoboku).



Rys.2.1 Reguła równoległoboku dodawania odcinków skierowanych

Jeżeli $s_1 = PM_1$, $s = \alpha s_1 = \alpha PM_1$ – to odcinek skierowany PM, rozciągnięty $|\alpha|$ razy w porównaniu z odcinkiem PM_1. Kierunek PM pokrywa się z kierunkiem PM_1, jeśli $\alpha > 0$ i przeciwne do kierunku PM_1, jeżeli $\alpha < 0$.





$|PM| = |\alpha|*|PM_1|$, $\alpha >$ $|PM| = |\alpha|*|PM_1|$, $\alpha <$

Rys.2.2 Reguła mnożenia odcinka skierowanego przez liczbę rzeczywistą

Tak samo jak w pierwszym przykładzie, aby upewnić się, że zbiór S z zaznaczonymi działaniami dodawania odcinków skierowanych i mnożenia odcinka skierowanego przez skalar jest przestrzenią wektorową, należy sprawdzić, czy wszystkie równości określenia 1.1 są spełnione. Ćwiczenie to polecamy czytelnikowi.

Przykład 2.3 Trójwymiarowa przestrzeń arytmetyczna

Niech R – ciało liczb rzeczywistych. Wektorem trójwymiarowej przestrzeni arytmetycznej nazwiemy uporządkowaną trójkę liczb rzeczywistych (α, β, γ).

Przez R_3 oznaczymy zbiór wektorów arytmetycznej przestrzeni trójwymiarowej.

$$R_3 = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R} \}$$

Określimy w zbiorze R_3 działania dodawania wektorów i mnożenia wektora przez liczbę w następujący sposób: dla dowolnych wektorów $\mathbf{a_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\mathbf{a_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ i liczby rzeczywistej δ

$$\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} = (\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2,\ \gamma_1+\gamma_2)$$

$$\delta * \mathbf{a_1} = (\delta*\alpha_1, \delta*\beta_1, \delta*\gamma_1)$$

Aby udowodnić, że określone w taki sposób działania przekształcają zbiór R_3 w przestrzeń wektorową, należy sprawdzić, czy spełnione są właściwości 1)–8) określenia przestrzeni wektorowej.

2.4. Ćwiczenia

1. Określimy zbiór W jako populację wszystkich trójmianów ze współczynnikami rzeczywistymi, które posiadają pierwiastek x = 1.

$$W = \{ p(x) = a*x^2 + b*x + c \mid a, b, c \in \mathrm{R}, p(1) = 0\}$$

Na zbiorze W założono zwykłe działania dodawania i mnożenia wielomianów przez liczbę rzeczywistą. Udowodnić, że W jest przestrzenią wektorową na ciele liczb rzeczywistych.
Które z następujących trójmianów należą do przestrzeni wektorowej W?

- $x^2 - 3*x + 2$;
- $3*x^2 - 5*x + 3$;
- $-x^2+x-1$;
- x^2-1;
- $2*x^2 - 4*x + 5$.

Sformułuj warunek przynależności trójmianu do przestrzeni wektorowej zależnie od współczynników a, b, c.

2. Określimy zbiór V jako grupę jednorodnych binarnych form dwóch zmiennych ze współczynnikami rzeczywistymi:

$$V = \{a*x^2 + b*xy + c*y2 \mid a, b, c \in \mathrm{R} \}$$

Na zbiorze V założono zwykłe działania dodawania i mnożenia form binarnych przez liczbę rzeczywistą. Udowodnić, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

3. Oznaczymy zbiór W jako zbiór wszystkich ciągów podstawowych (fundamentalnych) z wyrazami wymiernymi.

$$W = \left\{ A = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \middle| A - podstawowy \right\}$$

W zbiorze W założono zwykłe działania dodawania ciągów (dodawanie wyrazów) i mnożenia przez liczbę rzeczywistą (mnożenie wyrazów). Udowodnić, że W jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb wymiernych.

4. Oznaczymy zbiór F jako zbiór wszystkich funkcji rosnących na osi liczbowej R. Rozpatrzyć na zbiorze F działania dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę rzeczywistą. Czy zbiór F jest przestrzenią wektorową? Jeżeli nie to, jaka właściwość określająca przestrzeń wektorową nie jest spełniona?

5. Oznaczymy przez zbiór W populację wszystkich trójmianów ze współczynnikami rzeczywistymi, które spełniają zależność $a-2*b+3*c = 0$

$$W = \{ p(x) = a*x^2 + b*x + c \mid a, b, c \in R, a - 2*b + 3*c = 0\}$$

Na zbiorze W zadano zwykłe działania dodawania i mnożenia wielomianów przez liczbę rzeczywistą. Czy W jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych?

6. Oznaczymy przez zbiór W rzeszę wszystkich trójmianów ze współczynnikami rzeczywistymi, które spełniają zależność $b^2 - 4*a*c = 0$

$$W = \{ p(x) = a*x^2 + b*x + c \mid a, b, c \in R, b^2 - 4*a*c = 0 \}$$

W zbiorze W dane są zwykłe działania dodawania i mnożenia wielomianów przez liczbę rzeczywistą. Czy W jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych?

7. Rozpatrzyć populację S wektorów trójwymiarowej przestrzeni arytmetycznej (patrz: przykład 3) takich, że: $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$$S = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in R, \alpha + \beta + \gamma = 0\}$$

Czy S jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych?

8. Rozpatrzyć zbiór S wektorów trójwymiarowej przestrzeni arytmetycznej (patrz: przykład 3) takich, że $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

$$S = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in R, \ \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2\}$$

Czy S jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych?

9. Rozpatrzyć grupę S wektorów trójwymiarowej przestrzeni arytmetycznej (patrz: przykład 3) takich, że: $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$

$$S = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in R, \ f(\alpha, \beta, \gamma) = 0\}$$

Jaką powinna być funkcja f, aby zbiór S obrazował przestrzeń wektorową?

2.5 Zależność liniowa wektorów

OKREŚLENIE 2.2

Układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \ldots, \overline{a_n}\}$ (n $\geq$ 1) nazywa się liniowo zależnym, jeżeli istnieje układ skalarów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, z których, przynajmniej, jeden nie równa się zero i dla których prawdziwa jest równość:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0} \qquad (2.1)$$

Wyrażenie $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n}$ będziemy nazywać kombinacją liniową wektorów $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \ldots, \overline{a_n}$ a skalary $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ – współczynnikami tej kombinacji liniowej. Jeśli kombinacja liniowa układu wektorów równa się $\overline{0}$, to nazywa się ją zerową kombinacją liniową.

Wyróżnimy najprostsze własności układów wektorów liniowo zależnych:

1) Układ wektorów, który zawiera tylko jeden wektor $\overline{a}$, jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{a} = \overline{0}$.

Dowód:

Jeżeli $\overline{a} = \overline{0}$, to dla $\alpha = 1$ mamy: $1\overline{a} = 1\ \overline{0} = \overline{0}$, to znaczy otrzymaliśmy zerową kombinację liniową, w której jest niezerowy współczynnik; zatem dany układ jest liniowo zależny. Przypuśćmy, że układ $\{\overline{a}\}$ jest liniowo zależny, to znaczy $\alpha\overline{a} = \overline{0}$, przy czym $\alpha \neq 0$. Wtedy, zgodnie z własnością 9 przestrzeni wektorowych $\overline{a} = \overline{0}$.

2) Układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}\}$ dla n > 1 jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową innych.

Dowód:

Jeśli jeden z wektorów danego układu, na przykład $\overline{a_1}$, równa się kombinacji liniowej pozostałych, to $\overline{a_1} = \beta_2 \overline{a_2} + \beta_3 \overline{a_3} + \ldots + \beta_n \overline{a_n}$. Stąd $1\overline{a_1} + (-\beta_2)\overline{a_2} + (-\beta_3)\overline{a_3} + \ldots + (-\beta_n)\overline{a_n} = \overline{0}$, przy czym współczynnik przy $\overline{a_1}$ równa się jedności, czyli jest różny od zera.

Zatem, dany układ jest liniowo zależny. Załóżmy teraz, że układ wektorów $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3},\ \ldots,\ \overline{a_n}\}$ jest liniowo zależny, to znaczy, że $\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3} + \ldots + \alpha_n\overline{a_n} = \overline{0}$, (2.2), przy czym przynajmniej jeden ze współczynników α_j, na przykład α_1, nie jest równy 0; $\alpha_1 \neq 0$. Z równości (2.2) otrzymujemy: $\alpha_1\overline{a_1} = (-\alpha_2)\overline{a_2} + (-\alpha_3)\overline{a_3} + \ldots + (-\alpha_n)\overline{a_n}$. Pomnożywszy tę współzależność przez α_1^{-1} ($\alpha_1^{-1} \neq 0$), otrzymujemy równość:
$\overline{a_1} = (-\alpha_2\alpha_1^{-1})\overline{a_2} + (-\alpha_3\alpha_1^{-1})\overline{a_3} + \ldots + (-\alpha_n\alpha_1^{-1})\overline{a_n}$. To znaczy, że $\overline{a_1}$ jest kombinacją liniową wektorów $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3},\ \ldots,\ \overline{a_n}$.

3) Jeśli pewny niepusty podukład danego układu wektorów jest liniowo zależny, to i cały układ jest liniowo zależny.

Dowód:

Niech dany jest układ wektorów $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3},\ \ldots,\ \overline{a_n}\}$ i przypuśćmy, że pewien jego podukład m wektorów jest liniowo zależny (0<m<n). Dany układ wektorów można w razie potrzeby przenumerować tak, aby i jego podukład z pierwszymi m wektorami był liniowo zależny. W ten sposób, $\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3} + \ldots + \alpha_m\overline{a_m} = \overline{0}$, przy czym, przynajmniej jeden ze współczynników $\alpha_j \neq 0$ (na przykład $\alpha_1 \neq 0$). Założywszy, że $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_n = 0$ otrzymujemy, że
$\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3} + \ldots + \alpha_m\overline{a_m} + \alpha_{m+1}\overline{a_{m+1}} + \ldots + \alpha_n\overline{a_n} = \overline{0}$ przy czym $\alpha_1 \neq 0$. To znaczy, że dany układ wektorów jest liniowo zależny.

OKREŚLENIE 2.3.

Układ wektorów $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3},\ \ldots,\ \overline{a_n}\}$, (n > 1) nazywa się liniowo zależnym, jeśli z równości $\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3} + \ldots + \alpha_n\overline{a_n} = \overline{0}$ wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

W ten sposób, kombinacja liniowa liniowo niezależnego układu wektorów jest zerowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej współczynniki równają się 0.

UWAGA

Kombinacja liniowa dowolnego układu wektorów, w którym wszystkie współczynniki równają się 0 jest zerowa. Jeżeli układ nie posiada innych zerowych kombinacji liniowych, to jest liniowo niezależny. Układ liniowo zależny posiada jeszcze inne zerowe kombinacje liniowe.

2.6 Własności układów wektorów liniowo niezależnych.

1) Liniowo niezależny układ wektorów nie zawiera wektora zerowego.

Dowód:

Jeśli układ wektorów zawiera wektor zerowy, to jego podukład, który składa się z jednego wektora zerowego jest liniowo niezależny (własność 1 układów liniowo niezależnych), a to znaczy, że także cały układ jest liniowo niezależny (własność 3 układów liniowo niezależnych). Otrzymano sprzeczność.

2) Jeśli układ wektorów jest liniowo niezależny, to dowolny jego podukład również jest liniowo niezależny.

Dowód wynika z własności 3 układów liniowo zależnych.

2.7 Przykłady

Przykład 2.4

Rozpatrzmy przestrzeń wektorową W_3 wszystkich warstw zmiennych x, y, z nad ciałem liczb rzeczywistych (patrz: przykład 1.1.):

$$W = \{\ \alpha x + \beta y + \gamma z \mid \alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q\ \}$$

Postawmy pytanie o niezależność liniową układu wektorów (form liniowych):

$L_1 = 2x + 3y – 4z$, $L_2 = -2x + 4y – 5z$, $L_3 = -x + 6y + 2z$

Rozwiązanie

Ułożymy kombinację liniową L_1, L_2, L_3 ze (nieokreślonymi) współczynnikami A, B, C:

$$A*L_1 + B*L_2 + C*L_3 = \mathbf{0}$$

Podstawiając wartości L_1, L_2, L_3, otrzymujemy:

$$A*(2x + 3y – 4z) + B*(-2x + 4y – 5z) + C*(-x + 6y + 2z) = \mathbf{0}$$

Przekształcimy otrzymaną równość, otworzywszy nawiasy i określiwszy współczynniki przy zmiennych x, y, z. Otrzymujemy:

$$(2A - 2B - C)*x + (3A + 4B + 6C)*y + (-4A – 5B + 2C)*z = \mathbf{0}$$

Zauważmy, że **0** w prawej części równości oznacza zerową warstwę liniową, to znaczy warstwę z zerowymi współczynnikami. Dlatego każde z wyrażeń przy zmiennych x, y, z można przyrównać do zera. Otrzymamy układ równań liniowych względem współczynników A, B, C jako nieznanych:

$$\begin{aligned} 2A - 2B – C &= 0 \\ 3A + 4B + 6C &= 0 \\ -4A – 5B + 2C &= 0 \end{aligned}$$

Pytanie o niezależność liniową układu wektorów sprowadza się do pytania, czy istnieje niezerowe rozwiązanie danego układu, to znaczy takie rozwiązanie, w którym przynajmniej jeden człon byłby różny od zera. Jeśli tak to układ wektorów jest liniowo zależny. Jeśli nie, to układ wektorów jest liniowo niezależny.

Ogólną teorię układów równań liniowych przedstawiono w rozdziale 1.

Rozwiązawszy układ otrzymujemy:

$$A = 0, B = 0, C = 0.$$

Zgodnie z określeniem niezależności liniowej, układ wektorów (form liniowych) zadania jest liniowo niezależny.

Przykład 2.5. Rozpatrzmy arytmetyczną przestrzeń wektorową R_3 nad ciałem liczb rzeczywistych (patrz: Przykład 2.1.):

$$R_3 = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R} \}$$

Wybierzemy w tej przestrzeni trzy wektory

$$\mathbf{a_1} = (2, 3, 4), \quad \mathbf{a_2} = (-2, 4, – 5), \quad \mathbf{a_3} = (6, 2, 13)$$

Należy określić, czy ten układ jest liniowo niezależny.

Rozwiązanie.

Kolejność działań będzie dokładnie taka sama jak w poprzednim przykładzie:

Ułożymy kombinację liniową wektorów o nieokreślonych współczynnikach A, B. C.

$$A*\mathbf{a_1} + B*\mathbf{a_2} + C*\mathbf{a_3} = \mathbf{0}$$

Podstawimy do niej wartości wektorów $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$:

$$A*(2, 3, 4) + B*(-2, 4, -5) + C*(6, 2, 13) = \mathbf{0}$$

Przy pomocy przekształceń określimy wektor – kombinację liniową lewej części równości:

$$(2A - 2B + 6C, 3A + 4B + 2C, 4A - 5B + 13C) = \mathbf{0}$$

Zerowy wektor przestrzeni R_3 to wektor (0, 0, 0). Dlatego:

$$(2A - 2B + 6C, 3A + 4B + 2C, 4A - 5B + 13C) = (0, 0, 0)$$

Porównując wyrazami lewą i prawą części równości, otrzymujemy układ równań liniowych:

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 6C &= 0, \\ 3A + 4B + 2C &= 0, \\ 4A - 5B + 13C &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązujemy ten układ metodą przekształceń elementarnych.

Otrzymujemy układ:

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 6C &= 0, \\ B - C &= 0, \\ -B + C &= 0. \end{aligned}$$

lub:

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 6C &= 0, \\ B - C &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Równość 0 = 0 można wyłączyć z układu.

$$\begin{aligned} 2A - 2B + 6C &= 0, \\ B - C &= 0. \end{aligned}$$

Układ posiada zbiór rozwiązań. Jedno z nich można otrzymać, jeśli przyjąć C = 1. Wtedy B = 1, A = -2. To znaczy, że układ wektorów $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ jest liniowo zależny. Można wskazać wartości niezerowe A, B, C, przy których odpowiednia kombinacja liniowa jest zerowa:

$$-2*\mathbf{a_1} + 1*\mathbf{a_2} + 1*\mathbf{a_3} = \mathbf{0}.$$

UWAGA

Po rozwiązaniu zadania otrzymaliśmy układ równań liniowych, który posiada zbiór rozwiązań. Ogólne metody rozwiązywania takich układów przedstawiono w rozdziale 1. Jednak w naszym przypadku trzecie równanie okazało się równością równoważną, dlatego rozwiązania szukaliśmy, używając tylko pierwszych dwóch równań. Wywód o istnieniu zbioru rozwiązań zrobiliśmy, dlatego że zmiennej C można przypisywać dowolne wartości, a następnie obliczać wartości innych zmiennych.

Przykład 2.3

Oznaczymy przestrzeń wektorową W jako populację wszystkich trójmianów o współczynnikach rzeczywistych

$$W = \{ p(x) = a*x^2 + b*x + c \mid a, b, c \in R\}$$

oraz działaniami dodawania trójmianów i mnożeniem trójmianu przez liczbę rzeczywistą. Rozpatrzymy trzy wektory:

$$\mathbf{p_1} = x^2 - 3*x + 2, \qquad \mathbf{p_2} = x^2-1, \qquad \mathbf{p_3} = x^2 – 4*x + 3.$$

W zadaniu trzeba określić, czy można wyrazić liniowo wektor $\mathbf{p_3}$ poprzez $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$?

Rozwiązanie

Tak jak w poprzednich przykładach, ułożymy szukaną równość o nieokreślonych współczynnikach:

$$A*\mathbf{p_1} + \mathbf{B*p_2 = p_3}$$

Jeśli podstawić do tej równości wartości $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$ i przyjąć, że wektorem zerowym jest trójmian o zerowych współczynnikach, to otrzymamy układ równań liniowych:

A + B = 1 // przyrównujemy współczynniki przy x^2
-3A = -4 // przyrównujemy współczynniki przy x
2A - B = 3 // przyrównujemy wyrazy wolne

Rozwiązując ten układ, otrzymujemy: A = 4/3, B = -1/3.
Zatem, $\mathbf{p_3} = 4/3*\mathbf{p_1} – 1/3*\mathbf{p_2}$**.**

Uwaga

Otrzymany układ posiada trzy równania z dwoma zmiennymi. Przy rozwiązaniu wartości A, B wynikają z pierwszych dwóch równań, a trzecie równanie przekształciło się w równość.

Przykład 2.6

Rozpatrzymy układ wektorów arytmetycznej przestrzeni trójwymiarowej:

$$\mathbf{a_1} = (1, -3, 2), \quad \mathbf{a_2} = (1, 0, -1), \quad \mathbf{a_3} = (1, -4, 4).$$

W zadaniu należy określić, czy można przedstawić liniowo wektor $\mathbf{a_3}$ poprzez $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$?

Rozwiązanie

Ułożymy kombinację liniową o nieokreślonych współczynnikach:

$$A*\mathbf{a_1} + B*\mathbf{a_2} = \mathbf{a_3}$$

Jeśli podstawi się do tej równości wartości $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ oraz przyjmie, że wektorem zerowym jest wektor (0, 0, 0), to otrzymamy układ równań liniowych:

A + B = 1
-3A = -4
2A - B = 4

Rozwiązując ten układ, otrzymamy z dwóch pierwszych równań: A = 4/3, B = -1/3. Jednak przy podstawianiu tych wartości do trzeciego równania otrzymamy równość sprzeczną 3 = 4. To oznacza, że układ nie posiada rozwiązań. Dlatego wektora $\mathbf{a_3}$ nie można wyrazić liniowo poprzez $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$.

2.8 Ćwiczenia

1. Udowodnić, że układ wektorów {(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5)} trójwymiarowej przestrzeni arytmetycznej jest liniowo niezależny.

2. Niech S = $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}\}$ – układ wektorów pewnej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb wymiernych. Udowodnić, że S jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ

$$S_1 = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}, \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3}\}$$

Jest liniowo niezależny.

3. Rozpatrzyć przestrzeń wektorową W wszystkich trójmianów ze współczynnikami rzeczywistymi, które mają pierwiastek x = 1.

$$W = \{ p(x) = a*x^2 + b*x + c \mid a, b, c \in R, p(1) = 0\}$$

Udowodnić, że dowolny układ trzech wektorów w tej przestrzeni jest liniowo zależny.

4. Rozpatrzyć przestrzeń wektorową V jednorodnych binarnych form dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych:

$$V = \{a*x^2 + b*xy + c*y^2 \mid a, b, c \in R \}$$

Udowodnić, że w tej przestrzeni wektorowej można wyróżnić układ składający się z trzech wektorów liniowo niezależnych. Udowodnić, że w tej przestrzeni dowolny układ czterech wektorów jest liniowo zależny.

2.9 Równoważne układy wektorów.

OKREŚLENIE 2.4

Mówimy, że układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ wyraża się liniowo poprzez układ wektorów $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_m}\}$, jeśli dowolny wektor pierwszego układu jest kombinacją liniową drugiego układu.

OKREŚLENIE 2.5

Dwa układy wektorów nazywa się równoważnymi, jeśli każdy z nich wyraża się liniowo poprzez drugi.

LEMAT 2.1

Jeśli układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ wyraża się liniowo poprzez układ wektorów $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_m}\}$, który wyraża się liniowo poprzez układ $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_r}\}$, to pierwszy układ wektorów wyraża się liniowo poprzez trzeci.

Wyprowadzenie lematu 2.1 oznacza, że reprezentacja liniowa posiada własność przechodności.

Dowód

Zgodnie z warunkiem lematu układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ wyraża się liniowo poprzez układ $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_n}\}$. To znaczy, że $\overline{a_i} = \beta_{i1}\overline{b_1} + \beta_{i2}\overline{b_2} + \ldots + \beta_{im}\overline{b_m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (2.3)

Rzeczywiście, także $\overline{b_j} = \gamma_{j1}\overline{c_1} + \gamma_{j2}\overline{c_2} + ... + \gamma_{jr}\overline{c_r}$, $j = 1, 2, ..., m$. Dlatego, podstawiając do (2.3) zamiast wektorów $\overline{b_k}$ ich wyrażenia poprzez wektory układu $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_r}\}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\overline{a_i} &= \beta_{i1}(\gamma_{11}\overline{c_1} + \gamma_{12}\overline{c_2} + \ldots + \gamma_{1r}\overline{c_r}) + \\
&\beta_{i2}(\gamma_{21}\overline{c_1} + \gamma_{22}\overline{c_2} + \ldots + \gamma_{2r}\overline{c_r}) + .. \\
&. + \beta_{im}(\gamma_{m1}\overline{c_1} + \gamma_{m2}\overline{c_2} + \ldots + \gamma_{mr}\overline{c_r}) = \\
&= (\beta_{i1}\gamma_{11} + \beta_{i2}\gamma_{21} + ... + \beta_{im}\gamma_{m1})\overline{c_1} + (\beta_{i1}\gamma_{12} + \beta_{i2}\gamma_{22} + ... + \beta_{im}\gamma_{m2})\overline{c_2} + \\
&... + (\beta_{i1}\gamma_{1r} + \beta_{i2}\gamma_{2r} + ... + \beta_{im}\gamma_{mr})\overline{c_r}
\end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Otrzymane zależności oznaczają, że układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ wyraża się liniowo poprzez układ $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_r}\}$.

Lemat został udowodniony.

Z lematu 2.1 wynika, że pojęcie równoważności układów wektorów również posiada własność przechodniości. Z określenia równoważności układów wektorów wynika bezpośrednio, że pojęcie to posiada również własność zwrotności i symetryczności.

2.10 Przekształcenia elementarne układów wektorów

Niech będzie dany układ wektorów (A): $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}\right\}$, $n>2$. Będziemy na podstawie układu wektorów (A) tworzyć nowe układy wektorów przy pomocy pewnych przekształceń, które przyjęto nazywać elementarnymi.

OKREŚLENIE 2.6.

Przekształceniami elementarnymi układu wektorów (A) $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}\right\}$, G_{11}, nazywa się następujące działania:

1) Przestawienie wektorów $\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}$ (zmiana numeracji wektorów). Przy pomocy przekształcenia 1 układ wektorów $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}\right\}$ przekształca się w układ $\left\{\overline{b_1},\ \overline{b_2},...,\ \overline{b_n}\right\}$, gdzie $\overline{b_i}=\overline{a_j}$, j – 1, 2, ..., n (jeden z numerów, nie obowiązkowo równy i).
2) Mnożenie wektora $\overline{a_i}$ przez skalar $\lambda\in F$, $\lambda\neq 0$. Przy pomocy przekształcenia 2 układ wektorów (A) przekształca się w układ $\left\{\overline{a_1},\ \lambda\overline{a_2},\ \overline{a_3},\ \ldots,\ \overline{a_n}\right\}$ (wektor $\overline{a_2}\in A$ pomnożono przez skalar λ).
3) Mnożenie wektora $\overline{a_i}$ przez liczbę λ, dodanie otrzymanego wektora do wektora $\overline{a_j}$, $j\neq 1$, oraz zamiana wektora $\overline{a_j}$ na sumę wektorów. Przy pomocy przekształcenia 3 układ wektorów (A) przekształca się w układ $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3}+\lambda\overline{a_2},\ \ldots,\ \overline{a_n}\right\}$ (wektor $\overline{a_2}\in A$ pomnożono przez λ, dodano otrzymany wektor do wektora $\overline{a_3}$ i zamieniono wektor $\overline{a_3}$ na sumę $\overline{a_3}+\lambda\overline{a_2}$).

LEMAT 2.2.

Jeśli układ wektorów (B): $\left\{\overline{b_1},\ \overline{b_2},...,\ \overline{b_n}\right\}$ otrzymano z układu (A): $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}\right\}$, przy pomocy dowolnego przekształcenia elementarnego, to te układy wektorów są równoważne.

Dowód

W przypadku przekształcenia elementarnego 1 dowód lematu jest oczywisty.

Jeżeli układ (B) otrzymano z układu (A) przy pomocy przekształcenia 2, to $\overline{b_j}=\lambda\overline{a_i}$, dla pewnego j, $\lambda\neq 0$. Dla $i\neq j$ $\overline{b_i}=0\overline{a_1}+0\overline{a_2}+\ldots+1\overline{a_i}+\ldots+0\overline{a_n}$; jeżeli $i=j$, to $\overline{b_j}=0\overline{a_1}+0\overline{a_2}+\ldots+\lambda\ \overline{a_j}+\ldots+0\overline{a_n}$.

W taki sposób, układ (B) wyraża się liniowo poprzez układ (A). I odwrotnie, dla $i\neq j$, $\overline{a_i}=1\overline{b_i}$; jeśli $i=j$, to $\overline{a_j}=\lambda^{-1}\overline{b_j}$ ($\lambda\neq 0$). Rzeczywiście, układ (A) również wyraża się liniowo poprzez (B) i to oznacza, że układy są równoważne.

Niech teraz układ (B) otrzymano z (A) przy pomocy przekształcenia 3 (na przykład: $\overline{a_i}=\overline{b_i}$, $i\neq 1$; $\overline{b_1}=\overline{a_1}+\lambda\overline{a_j}$ $j\neq 1$). Oczywiście, że układ (B) wyraża się liniowo poprzez układ (A). Odwrotnie, jak dla $i\neq 1$, $\overline{a_i}=\overline{b_i}$, to $\overline{a_1}=\overline{b_1}-\lambda\overline{a_j}=\overline{b_1}-\lambda\overline{b_j}$. Stąd wynika, że układ (A) wyraża się liniowo poprzez (B) i w tym przypadku układy wektorów są równoważne.

LEMAT 2.3.

Jeśli układ wektorów (A): $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}\right\}$ jest liniowo niezależny, a układ wektorów (B): $\left\{\overline{b_1},\ \overline{b_2},...,\ \overline{b_n}\right\}$ otrzymano z układu (A) w wyniku jednego z przekształceń elementarnych 1-3, to układ wektorów (B) również jest liniowo niezależny.

Dowód

W przypadku przekształcenia 1 dowód jest oczywisty.

Niech (B) otrzymano z (A) przy pomocy przekształcenia 2. Załóżmy, że $\overline{b_j} = \lambda \overline{a_j}$, $\lambda \neq 0$. Udowodnimy zerową kombinację wektorów układu (B): $\beta_1 \overline{b_1} + \beta_2 \overline{b_2} + ... + \beta_j \overline{b_j} + ... + \beta_n \overline{b_n} = \overline{0}$. Gdy $\overline{a_i} = \overline{b_i}$, $i \neq j$, $\overline{b_j} = \lambda \overline{a_j}$, to:

$$\beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + ... + (\beta_j \lambda) \overline{a_j} + ... + \beta_n \overline{a_n} = \overline{0}.$$

Z liniowej niezależności układu (A) wynika, że $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_j \lambda = \ldots = \beta_n = \overline{0}$. Gdy $\lambda \neq 0$, to $\beta_j = 0$ dla wszystkich $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, układ (B) jest liniowo niezależny.

Niech układ (B) otrzymano z układu (A) przy pomocy przekształcenia 3; $\overline{b_j} = \overline{a_j} + \lambda \overline{a_i}$, $i \neq j$. Ponownie rozpatrzymy zerową kombinację liniową wektorów układu (B):

$$\beta_1 \overline{b_1} + \beta_2 \overline{b_2} + \ldots + \beta_j \overline{b_j} + \ldots + \beta_n \overline{b_n} = \overline{0}.$$

Dokonując podstawienia $\overline{b_j} = \lambda \overline{a_j}$, $i \neq j$, $(- \overline{a})$ otrzymamy: $\beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + ... + \beta_j (\overline{a_j} + \lambda \overline{a_i}) + ... + \beta_n \overline{a_n} = \overline{0}$ lub $\beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + ... + (\beta_i + \lambda \beta_j) \overline{a_i} + ... + \beta_n \overline{a_n} = \overline{0}$. Z liniowej niezależności układu (A) otrzymujemy, że

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_i + \lambda \beta_j = ... = \beta_j = ... = \beta_n = 0.$$

W ten sposób wszystkie β_s, $s \neq i$, a w szczególności $\beta_i = 0$. Gdy $\beta_i + \lambda \beta_j = 0$, to $\beta_i = 0$. Zatem układ (B) jest liniowo niezależny.
Lemat udowodniono.

LEMAT 2.4. (Steinitz'a)

Jeśli układ wektorów (A), $\left\{ \overline{a_1},\ \overline{a_2}, ...,\ \overline{a_r} \right\}$ jest liniowo niezależny i wyraża się liniowo poprzez układ wektorów (B), $\left\{ \overline{b_1},\ \overline{b_2}, ...,\ \overline{b_s} \right\}$, to $r \leq s$.

Dowód

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie zgodnie z liczbą elementów w układzie (A).

Jeśli $i = 1$, to lemat jest oczywisty, ponieważ układ wektorów (B) nie może być pusty ($\overline{a_i} \neq 0$). Przypuśćmy, że lemat został udowodniony dla $i = m$ i udowodnimy go dla $i = m + 1$. Gdy układ (A) wyraża się liniowo poprzez układ (B), to $\overline{a_i} = \alpha_{i1} \overline{b_1} + \alpha_{i2} \overline{b_2} + ... + \alpha_{is} \overline{b_s}$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ m+1$.

Na skutek niezależności liniowej wektorów układu (A), $\alpha_1 \neq 0$ oraz przynajmniej jednego ze współczynników $\alpha_{1j} \neq 0$. Bez ograniczenia można uważać, że $\alpha_{11} \neq 0$. Rozpatrzmy układ wektorów (C), $\left\{ \overline{c_1},\ \overline{c_2},\ \overline{c_3},\ ...,\ \overline{c_r} \right\}$, gdzie $\overline{c_1} = \overline{a_1}$, $\overline{c_j} = \overline{a_j} + (-\alpha_{j1} \alpha_{11}^{-1}) \overline{a_1}$, $j > 1$. W ten sposób, układ (C) wyraża się liniowo poprzez układ (B): $\overline{c_1} = \alpha_{11} \overline{b_1} + \alpha_{12} \overline{b_2} + \ldots + \alpha_{1s} \overline{b_s}$, $\overline{c_j} = \gamma_{j1} \overline{b_1} + \gamma_{j2} \overline{b_2} + \ldots + \gamma_{js} \overline{b_s}$, $j > 1$, gdzie $\gamma_{ji} = \alpha_{ji} - \alpha_{j1} \alpha_{1i} \alpha_{11}^{-1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$.

Otrzymujemy z tego, że $\gamma_{j1} = \alpha_{j1} - \alpha_{j1} \alpha_{11} \alpha_{11}^{-1} = \alpha_{j1} - \alpha_{j1} = 0$. To znaczy, że

$\overline{c_1} = \alpha_{11} \overline{b_1} + \alpha_{12} \overline{b_2} + \ldots + \alpha_{1s} \overline{b_s}$, $\overline{c_j} = \gamma_{j2} \overline{b_2} + \ldots + \gamma_{js} \overline{b_s}$, $j > 1$ (2.4)

Rozpatrzmy ciąg układów wektorów: (A)=(C_1),(C_2), ...,(C_{s-1}), (C)=(C_s), (C_t)=$\left\{ \overline{c_1},\ \overline{c_2}, ...,\ \overline{c_t}, \overline{a_{t+1}}, ..., \overline{a_s} \right\}$, $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1$.

Oczywiście, układ wektorów (C_t) otrzymano z układu (C_{t-1}) poprzez zamianę wektora $\overline{a_t}$ na wektor $\overline{c_t} = \overline{a_t} - \alpha_{t1} \alpha_{11}^{-1} \overline{a_1} = \overline{a_t} - \alpha_{t1} \alpha_{11}^{-1} \overline{c_1}$.

To znaczy, układ wektorów (C_t) otrzymano z układu wektorów (C_{t-1}) przy pomocy przekształcenia elementarnego 3. Wskutek lematu 2.3 układ wektorów (C_2) jest liniowo niezależny, ponieważ układ (C_1)=(A) jest liniowo niezależny zgodnie z warunkiem lematu. Analogicznie, stosując lemat 1.3, wykażemy kolejno niezależność liniową wektorów (C_3), (C_3), ...,(C_{s-1}), (C_s)=(C).

Układ (D), $\left\{ \overline{c_2},\ \overline{c_3},\ ...,\ \overline{c_r} \right\}$, jako podukład liniowo niezależnego układu wektorów, sam będzie liniowo niezależny (wł. 2 układów liniowo niezależnych). Z drugiej strony, układ (D) wyraża się liniowo poprzez układ (F), $\left\{ \overline{b_2},\ \overline{b_3},\ ...,\ \overline{b_s} \right\}$, który zawiera (s-1) wektorów. Gdy układ (D) zawiera (r-1) wektor oraz jest liniowo niezależny, to zgodnie z założeniem indukcji (r-1) ≤ (s-1), to znaczy $r \leq s$. Lemat udowodniono.

Rozdział 3. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

3.1 Rząd układu wektorów

Jednym z podstawowych pojęć teorii przestrzeni wektorowych jest pojęcie maksymalnego liniowo niezależnego podukładu układu wektorów.

OKREŚLENIE 3.1

Niech dany jest skończony i nieskończony podzbiór wektorów $S \subset V$, gdzie V – przestrzeń wektorowa nad ciałem F. Skończony zbiór $A = \left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2}, ...,\ \overline{a_r}\right\}$, $A \subset S$, nazywa się maksymalnym liniowo niezależnym podukładem na zbiorze S, jeśli spełnione są następujące warunki:

1) Układ wektorów (A) jest liniowo niezależny;

2) Jeśli do układu (A) dodać dowolny wektor $\overline{b} \in S$, to układ $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2}, ...,\ \overline{a_r}, \overline{b}\right\}$ będzie liniowo zależny.

LEMAT 3.1

Jeżeli A – maksymalny liniowo niezależny podukład na zbiorze wektorów S, to dowolny wektor $\overline{b} \in S$ można w jedyny sposób przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów układu (A), $A = \left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2}, ...,\ \overline{a_r}\right\}$.

Dowód:

Zgodnie z określeniem maksymalnego liniowo niezależnego podukładu, układ wektorów $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2}, ...,\ \overline{a_r}, \overline{b}\right\}$ jest liniowo zależny. To oznacza, że

$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_r \overline{a_r} + \beta \overline{b} = \overline{0}$ (3.1)

przy czym, przynajmniej jeden ze współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$ nie równa się zeru. Udowodnimy, że w tym przypadku $\beta \neq 0$. Jeśli tak nie jest, to $\beta = 0$, wtedy $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_r \overline{a_r} = \overline{0}$ i z niezależności liniowej układu (A) wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$. Gdy $\beta = 0$, to wszystkie współczynniki kombinacji liniowej w wyrażeniu (3.1) są równe zeru, a to przeczy założeniu. Zatem $\beta \neq 0$, wtedy z równości (3.1) otrzymamy:

$\beta \overline{b} = -\alpha_1 \overline{a_1} - \alpha_2 \overline{a_2} - \ldots - \alpha_r \overline{a_r}$, lub

$\overline{b} = (-\alpha_1 \beta^{-1}) \overline{a_1} + (-\alpha_2 \beta^{-1}) \overline{a_2} + ... + (-\alpha_r \beta^{-1}) \overline{a_r}$, $\overline{b} = \gamma_1 \overline{a_1} + \gamma_2 \overline{a_2} + \ldots + \gamma_r \overline{a_r}$
(3.2),

gdzie $\gamma_i = -\alpha_i \beta^{-1}$.

Pierwsza część twierdzenia została udowodniona. W celu udowodnienia zasady zgodności wyrażenia (3.2) należy ustalić, czy jeżeli w układzie współczynników $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ przynajmniej dla jednego $\lambda_i \neq \gamma_i$, to $\overline{b} \neq \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_r \overline{a_r}$. Zatem niech na przykład: $\lambda_1 \neq \gamma_1$, ale $\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_r \overline{a_r}$. Wtedy

$$\overline{0} = \overline{b} + (-\overline{b}) = \gamma_1 \overline{a_1} + \gamma_2 \overline{a_2} + ... + \gamma_r \overline{a_r} + (-\lambda_1 \overline{a_1} - \lambda_2 \overline{a_2} - ... - \lambda_r \overline{a_r}) =$$
$$(\gamma_1 - \lambda_1)\overline{a_1} + (\gamma_2 - \lambda_2)\overline{a_2} + ... + (\gamma_r - \lambda_r)\overline{a_r}$$

przy czym $\gamma_1 - \lambda_1 \neq 0$. To niemożliwe, gdy układ wektorów $\left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2}, ...,\ \overline{a_r}\right\}$ jest liniowo niezależny. Otrzymana sprzeczność wykazuje zgodność wyrażenia (3.2). Lemat został w pełni udowodniony.

Wniosek 3.1

Jeśli S – dowolny zbiór wektorów w przestrzeni V nad ciałem F i A – jego maksymalny liniowo niezależny podukład, to dowolny podzbiór $T \subset S$ wyraża się liniowo poprzez układ A.

Wniosek 3.2

Jeśli A i B – dwa maksymalne liniowo niezależne podukłady wektorów na zbiorze S, to ilość wektorów układu A równa jest ilości wektorów układu B.

Dowód:

Oznaczymy przez m i n ilość wektorów odpowiednio w układach A i B. Na skutek wniosku 3.1, układ wektorów A wyraża się liniowo poprzez układ wektorów B. Gdy A – układ niezależny liniowo, to zgodnie z lematem Steinitz'a, $m \leq n$. Zamieniwszy w tym wniosku miejscami układy A i B, otrzymamy, że $n \leq m$. Więc, $m = n$. W ten sposób, ilość wektorów w dowolnym maksymalnie liniowo niezależnym podukładzie ze zbioru S jest jedna i ta sama. To potwierdza określenia, które przytoczono poniżej.

OKREŚLENIE 3.2.

Przestrzeń wektorowa V nad ciałem F nazywa się n-wymiarową skończoną, jeśli istnieje w niej maksymalny podukład liniowo niezależny.

W dalszej części, wszystkie rozpatrywane przestrzenie wektorowe będą uważane za skończone n-wymiarowe. Z lematów 2.4 oraz 3.1 wynika, że dowolny podukład wektorów skończonej n-wymiarowej przestrzeni wektorowej posiada maksymalny liniowo niezależny podukład.

OKREŚLENIE 3.3.

Rzędem zbioru S nazywa się liczbę wektorów w dowolnym maksymalnym liniowo niezależnym podukładzie ze zbioru S.

3.2 Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

OKREŚLENIE 3.4.

Bazą skończonej n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V nazywa się dowolny maksymalny liniowo niezależny podukład w przestrzeni V.

OKREŚLENIE 3.5.

Wymiarem skończonej n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V nazywa się liczbę wektorów w dowolnej bazie tej przestrzeni (to znaczy rząd zbioru wektorów V).

Wymiar przestrzeni wektorowej V będziemy oznaczać przez dim V, a rząd układu wektorów S – przez r(S).

LEMAT 3.2.

Jeśli układ wektorów S_1 liniowo wyraża się poprzez układ wektorów a_{rs}, to rząd układu a_{ij} nie przewyższa rzędu a_{ij}.

Dowód:

Oznaczymy przez A_1 i A_2 maksymalne liniowo niezależne podukłady w układach S_1 i S_2. Ponieważ układ S_1 wyraża się poprzez S_2, to na skutek lematu 1.1, S_1 liniowo wyraża się przez A_2. Gdy $A_1 \subset S_1$, to liniowo niezależny układ wektorów A_1 wyraża się liniowo poprzez układ A_2. Na skutek lematu Steinitz'a, ilość wektorów w układzie A_1 (rząd układu S_1) nie przewyższa ilości wektorów w układzie A_2 (rząd układu S_2). W taki sposób, rząd układu S_1 nie jest wyższy od rzędu układu S_2.

Wniosek 3.3.

Rzędy układów wektorów równoważnych są równe.

W związku z pojęciem maksymalnego liniowo niezależnego podukładu wektorów powstaje pytanie o praktycznym poszukiwaniu takiego podukładu dla danego zbioru wektorów. W rozstrzygnięciu tego pytania może być pomocny następujący lemat:

LEMAT 3.3.

Jeśli $A = \left\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3},\ \ldots,\ \overline{a_m}\right\}$ – liniowo niezależny podukład wektorów w zbiorze S, to istnieje maksymalnie liniowo niezależny podukład B wektorów z S, który zawiera w sobie A.

Dowód:

Oznaczymy przez r rząd zbioru wektorów S i niech C – dowolny maksymalnie liniowo niezależny podukład z S. Jeśli A – układ liniowo niezależny, który wyraża się liniowo poprzez układ C, to $m \leq r$. Jeśli $m = r$, to układ wektorów A – maksymalny podukład liniowo niezależny w S, inaczej w S istniałby liniowo niezależny układ, który zawierałby $m+1=r+1$ wektor, co jest niemożliwe (wniosek 3.2). W takim razie dopuścimy B = A, i lemat jest udowodniony. Jeżeli $m < r$, to układ A, na skutek wniosku 3.2 nie może być maksymalnym liniowo niezależnym podukładem. Dlatego istnieje w S liniowo niezależny podukład $A_1 \supset A$, przy czym ilość wektorów w układzie A_1 wynosi m+1. Jeśli m+1 = r, to A – maksymalny liniowo niezależny podukład, $B = A_1 \supset A$, i twierdzenie lematu zostało udowodnione. Sadząc w ten sposób, otrzymamy szereg liniowo niezależnych podukładów $A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k$, przy czym liczba wektorów w układzie A_i wynosi $m+i$. Dla $k = r - m$ otrzymamy maksymalny liniowo niezależny podukład. Zakładając, że $B = A_{r-m}$, otrzymamy dowód lematu.

Wniosek 3.4.

Dowolny liniowo niezależny układ wektorów w skończonej n-wymiarowej przestrzeni wektorowej może być dodany do bazy całej przestrzeni.

Dalej będzie wymagany jeszcze jeden lemat.

LEMAT 3.4.

Niech S = $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ i T = $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, ... \overline{b_n}\}$ – dwa skończone układy wektorów, które zawierają jednakową liczbę wektorów. Jeżeli z dowolnej zależności $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{a}_i = \bar{0}$ wynika zależność $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{b}_i = \bar{0}$, to $r(T) \le r(S)$.

Dowód:

Przypuśćmy, że rząd układu wektorów T wynosi k, $k \le n$, oraz $\{\bar{b}_{s(1)}, \bar{b}_{s(2)}, \ldots, \bar{b}_{s(k)}\}$ - maksymalny liniowo niezależny podukład układu T; tutaj S – odwzorowanie zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$ na zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$, $k \le n$. Wykażemy, że $S_1 = \{\overline{a}_{s(1)}, \overline{a}_{s(2)}, ..., \overline{a}_{s(k)}\}$ jest także liniowo niezależnym układem wektorów. W tym celu trzeba przyrównać do zera wszystkie współczynniki w dowolnej zerowej kombinacji liniowej wektorów układu S_1.

Niech $\sum_{i=1}^{k} \mu_{s(i)} \bar{a}_{s(i)} = \bar{0}$. Wtedy $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{a}_j = \bar{0}$, gdzie $\lambda_j = \mu_{s(i)}$, jeśli $j = s(i)$, $\lambda_j = 0$, jeśli $j \ne s(i)$ dla żadnego i=1, 2, ..., k. Zgodnie z warunkiem lematu $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{b}_j = \bar{0}$, to znaczy $\sum_{i=1}^{k} \mu_{s(i)} \bar{b}_{s(i)} = \bar{0}$. Stąd wynika, że $\mu_{s(i)} = 0$, i=1, 2, ..., k, ponieważ $\{\bar{b}_{s(1)}, \bar{b}_{s(2)}, \ldots, \bar{b}_{s(k)}\}$ – układ wektorów liniowo niezależny. Zatem, $S_{(1)}$ jest liniowo niezależny, $S_{(1)} \subset S$. W taki sposób, $r(T) = k = r(S_1) \le r(S)$. Co należało udowodnić.

OKREŚLENIE 3.6.

Niech $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ – baza przestrzeni wektorowej wymiaru n nad ciałem F. Współrzędnymi wektora $\bar{b} \in V$ w bazie $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ nazywa się układ elementów $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ z ciała F takich, że $\bar{b} = \beta_1 \overline{b_1} + \beta_2 \overline{b_2} + \ldots + \beta_n \overline{b_n}$.

Zgodnie z lematem 3.1, współrzędne wektora $\bar{b}$ w bazie $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ są jednoznacznie określone i odwrotnie: wektor $\bar{b}$ jest określony, jeżeli dane są jego współrzędne w jakiejś bazie.

Jeśli wektor $\bar{b}$ posiada współrzędne $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ w danej bazie, to $\bar{b}$ będziemy zapisywać w postaci $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

LEMAT 3.5.

Współrzędne sumy (różnicy) dwóch wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są równe sumom (różnicom) odpowiednich współrzędnych tych wektorów; współrzędne iloczynu wektora $\bar{a}$ przez skalar λ są równe iloczynowi odpowiednich współrzędnych wektora $\bar{a}$ przez skalar λ.

Innymi słowy, jeśli $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, to $\overline{a} \pm \overline{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$, $\lambda \overline{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n)$.

Dowód:

Udowodnimy, na przykład, że $\overline{a} \pm \overline{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$ Gdy $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\overline{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, to

$\overline{a} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + ... + \alpha_n \overline{a_n}$; dlatego:

$$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n}) + (\beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + \ldots + \beta_n \overline{a_n})$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\overline{a_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{a_2} + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\overline{a_n}$$

Stąd otrzymujemy, że $\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$.

Tutaj $\overline{a_i} = \alpha_{i1} \overline{b_1} + \alpha_{i2} \overline{b_2} + \ldots + \alpha_{is} \overline{b_s}$ - baza przestrzeni V.

Inne zależności są do udowodnienia w podobny sposób.

PRZYKŁAD 3.1.

Niech F – dowolne ciało i n – pewna liczba naturalna. Rozpatrzymy iloczyn kartezjański $F^n = F \times F \times ... \times F$, w którym jest n czynników. Elementami zbioru F^n są zbiory n skalarów ciała F; jeśli $a \in F^n$, to $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. W zbiorze F^n określimy strukturę przestrzeni wektorowej nad ciałem F, W ten sposób, jeśli $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, to założymy:

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n), \ \lambda a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n) .$$

Element $a + b$ nazywamy sumą elementów a i b, a λa - iloczynem skalara λ i elementu a.

Poprzez sprawdzenie bezpośrednie można się przekonać, że określone w taki sposób działania dodawania i mnożenia przez skalar spełniają wszystkie aksjomaty przestrzeni wektorowej. Tak więc, F^n - przestrzeń wektorowa nad ciałem F.

Łatwo się również przekonać, że zbiór $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$, gdzie $\overline{e}_1 = (1,0,0,...,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1,0,...,0)$, ..., $\overline{e}_n = (0,0,0,...,1)$, jest bazą przestrzeni F^n. Tak więc, F^n- przestrzeń posiada wymiar n. Jeśli $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, to $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + ... + \alpha_n \overline{e}_n$. To znaczy, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$- współrzędne wektora $\overline{a}$ w danej bazie.

3.3 Odwzorowania izomorficzne przestrzeni wektorowych

Niech V – przestrzeń wektorowa n-wymiarowa na pewnym ciele F i $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ – jej baza. Oznaczymy odwzorowanie φ przestrzeni V w F^n zgodnie z następującą zasadą: dla $\overline{b} \in V$ założymy $\varphi(\overline{b}) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in F^n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ - współrzędne wektora $\overline{b}$ w bazie $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$.

Z lematu 3.5 wynika, że $\varphi(\overline{b} + \overline{c}) = \varphi(\overline{b}) + \varphi(\overline{c})$, $\varphi(\lambda \overline{b}) = \lambda \varphi(\overline{b})$. Oprócz tego, oczywiste jest, że odwzorowanie φ jest bijekcyjne.

OKREŚLENIE 3.7.

Dwie przestrzenie wektorowe U i V na tym samym ciele F nazywa się izomorficznymi, jeśli istnieje odwzorowanie bijekcyjne φ przestrzeni U w przestrzeń V, które spełnia warunki:

1) $\varphi(\overline{a} + \overline{b}) = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$ dla dowolnych wektorów $\overline{a} \in U$, $\overline{b} \in U$,
2) $\varphi(\lambda \overline{a}) = \lambda \varphi(\overline{a})$ dla dowolnego $\overline{a} \in U$ i dowolnego $\lambda \in F$.

Odwzorowanie φ nazywa się izomorfizmem.

3.4 Właściwości odwzorowania izomorficznego.

1) $\varphi(\overline{0}) = \overline{0}$ (tutaj jednakowym symbolem $\overline{0}$ oznaczone są: zerowy wektor przestrzeni U i zerowy wektor przestrzeni V). Rzeczywiście $\varphi(\overline{0}) = \varphi(0a) = 0\varphi(a) = \overline{0}$, tutaj a – dowolny wektor z przestrzeni U.

2) $\varphi(\alpha\overline{a}+\beta\overline{b})=\alpha\varphi(\overline{a})+\beta\varphi(\overline{b})$. Z warunku 1 określenia przestrzeni izomorficznych wynika, że $\varphi(\alpha\overline{a}+\beta\overline{b})=\alpha\varphi(\overline{a})+\beta\varphi(\overline{b})$; z warunku 2 $\varphi(\alpha\overline{a})=\alpha\varphi(\overline{a})$ i $\varphi(\beta\overline{b})=\beta\varphi(\overline{b})$, stąd otrzymujemy wymaganą własność.

3) $\varphi(\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\overline{a_n})=\alpha_1\varphi(\overline{a_1})+\alpha_2\varphi(\overline{a_2})+\ldots+\alpha_n\varphi(\overline{a_n})$ Ta właściwość jest łatwa do wyprowadzenia metodą indukcji matematycznej z właściwości 2.

4) Układ wektorów $\{\overline{\varphi(a_1)},\varphi(\overline{a_2}),\ldots,\varphi(\overline{a_n})\}$ przestrzeni wektorowej V jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy jest liniowo niezależny układ wektorów $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}\}$ w przestrzeni U.

Dowód

Załóżmy na początku, że układ $\{\overline{\varphi(a_1)},\varphi(\overline{a_2}),\ldots,\varphi(\overline{a_n})\}$ jest liniowo niezależny. Musimy udowodnić, że układ wektorów $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}\}$ jest również liniowo niezależny.

Załóżmy odwrotność. Wtedy istnieje układ skalarów $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, z których przynajmniej jeden nie jest równy zero taki, że $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\overline{a_n}=\overline{0}$. Wtedy $\varphi(\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\overline{a_n})=\varphi(\overline{0})$.
Stosując własności 1 i 3 odwzorowań izomorficznych, otrzymujemy: $\alpha_1\varphi(\overline{a_1})+\alpha_2\varphi(\overline{a_2})+\ldots+\alpha_n\varphi(\overline{a_n})=\overline{0}$, co przeczy liniowej niezależności układu $\{\overline{\varphi(a_1)},\varphi(\overline{a_2}),\ldots,\varphi(\overline{a_n})\}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Niech teraz dany jest układ wektorów $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}\}$ liniowo niezależny. Załóżmy, że układ wektorów $\{\overline{\varphi(a_1)},\varphi(\overline{a_2}),\ldots,\varphi(\overline{a_n})\}$ jest liniowo niezależny. Wtedy $\alpha_1\varphi(\overline{a_1})+\alpha_2\varphi(\overline{a_2})+\ldots+\alpha_n\varphi(\overline{a_n})=\overline{0}$, przy czym nie wszystkie $a_i=0$.

Zgodnie z własnością 3 odwzorowań izomorficznych lewa część ostatniej równości wynosi $\varphi(\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\overline{a_n})$, a prawa część $\varphi(\overline{0})$. Na skutek bijekcji odwzorowania φ, $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\overline{a_n}=\overline{0}$, co jest niemożliwe, gdyż zgodnie z warunkiem układ wektorów $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}\}$ jest liniowo niezależny.

Właściwość 4 została w pełni udowodniona.

TWIERDZENIE 3.1.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby dwie przestrzenie wektorowe U i V na tym samym ciele F były izomorficzne, jest to, by wymiary przestrzeni U i V były jednakowe.

Dowód:

Warunek konieczny.

Załóżmy, że przestrzenie U i V są izomorficzne oraz φ jest odwzorowaniem izomorficznym U na V. Jeśli $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}\}$ – baza przestrzeni U, to układ wektorów $\{\overline{\varphi(a_1)},\varphi(\overline{a_2}),\ldots,\varphi(\overline{a_n})\}$ w przestrzeni V jest liniowo niezależny na skutek własności 4. Załóżmy, że ten układ nie jest bazą przestrzeni V. Wtedy w przestrzeni V istnieje wektor $\overline{y}$, taki, że układ wektorów $\{\varphi\overline{(e_1)},\varphi(\overline{e_2}),\ldots,\varphi(\overline{e_n})\}$ jest liniowo niezależny. Na skutek suriekcji odwzorowania φ, $\overline{y}=\varphi(\overline{a})$, dla pewnego wektora $\overline{a}\in U$. W ten sposób, układ wektorów $\{\varphi(\overline{e_1}),\varphi(\overline{e_2}),\ldots,\varphi(\overline{e_n})\}$ jest liniowo niezależny. Zgodnie z warunkiem 4, układ $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n},\overline{a}\}$ jest również liniowo niezależny. Jest to niemożliwe, bowiem $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}\}$ jest bazą przestrzeni U. W ten sposób, układ wektorów $\{\varphi\overline{(e_1)},\varphi(\overline{e_2}),\ldots,\varphi(\overline{e_n})\}$ – maksymalny liniowo niezależny układ wektorów przestrzeni **V**, to znaczy jej baza. Dlatego wymiary przestrzeni U i V są jednakowe (obie wynoszą **n**).

Warunek wystarczający.

Załóżmy, że wymiary przestrzeni U i V są jednakowe. Niech $\{\overline{e_1}, \overline{e_2},..., \overline{e_n}\}$ – pewna baza przestrzeni U, a $\{\overline{f_1}, \overline{f_2},..., \overline{f_n}\}$ – pewna baza przestrzeni V. Jeśli $\overline{x}$ - dowolny wektor przestrzeni U, to $\overline{x} = \gamma_1\overline{e_1} + \gamma_2\overline{e_2} + \ldots + \gamma_n\overline{e_n}$. Niech $\varphi(\overline{x}) = \gamma_1\overline{f_1} + \gamma_2\overline{f_2} + \ldots + \gamma_n\overline{f_n}$, $\overline{f} \in V$. Tym samym określono odwzorowanie φ przestrzeni U w przestrzeni V. To znaczy, że odwzorowanie φ przekształca wektor $\overline{x} \in U$, o współrzędnych $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ w bazie $\{\overline{e_1}, \overline{e_2},..., \overline{e_n}\}$ w wektor $\overline{y}$ przestrzeni V o tych samych współrzędnych w bazie $\{\overline{f_1}, \overline{f_2},..., \overline{f_n}\}$. Z tej uwagi i z lematu 2.5 wynika, że $\varphi(\overline{a} + \overline{b}) = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$, $\varphi(\lambda\overline{a}) = \lambda\varphi(\overline{a})$ dla dowolnych wektorów $\overline{a} \in U$, $\overline{b} \in U$ i dowolnego $\lambda \in F$. Jeśli $\varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{b})$, to odpowiednie współrzędne wektorów $\varphi(\overline{a})$ i $\varphi(\overline{b})$ pokrywają się. To oznacza, że odpowiednie współrzędne wektorów $\overline{a}$ i $\overline{b}$ także są równe i $\overline{a} = \overline{b}$. W ten sposób, odwzorowanie φ jest iniekcją. Jeśli $\overline{y}$ jest dowolnym wektorem przestrzeni V o współrzędnych $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ w bazie $\{\overline{f_1}, \overline{f_2},..., \overline{f_n}\}$, to $\overline{y} = \varphi(\overline{x})$, gdzie $\overline{x}$ - wektor o współrzędnych $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ w bazie $\{\overline{e_1}, \overline{e_2},..., \overline{e_n}\}$. Zatem, odwzorowanie φ - surjekcja. Biorąc pod uwagę powyższe, otrzymamy, że φ jest odwzorowaniem izomorficznym przestrzeni U na przestrzeń V.

Twierdzenie zostało w pełni udowodnione.

Z tego twierdzenia łatwo wywieść, że relacja izomorfizmu przestrzeni wektorowych jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, to znaczy jest relacją równoważną.

Z przykładu, rozpatrywanego na początku tego paragrafu, wynika, że przestrzeń wektorowa V o wymiarze n nad ciałem F jest izomorficzna F^n. Jeśli $F=R$, R – ciało liczb rzeczywistych, to przestrzeń wektorowa R^n nazywa się n-wymiarową arytmetyczną przestrzenią wektorową. W taki sposób, dowolna n-wymiarowa przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych R jest izomorfizmem arytmetycznej przestrzeni n-wymiarowej.

Jeśli odejdzie się od konkretnej natury wektorów, z których składa się przestrzeń wektorowa V, a wziąć pod uwagę tylko te ich właściwości, które są związane z działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez skalar, to izomorficzne przestrzenie wektorowe nie różnią się. Dlatego można powiedzieć, że z dokładnością do znaków, izomorficzne przestrzenie wektorowe pokrywają się.

Uwaga

Jeśli ciało F jest ciałem reszty pierścienia modułu liczb całkowitych $P(F = Z_p)$, to przestrzeń wektorowa F^n zawiera P^n elementów. Ponieważ dowolna n-wymiarowa przestrzeń wektorowa U nad ciałem Z_p jest izomorficzna do przestrzeni Z_p^n, a odwzorowanie izomorficzne φ przestrzeni U na Z_p^n jest bijekcyjne, to przestrzeń U zawiera p^n elementów. Zatem, n-wymiarowa przestrzeń wektorowa nad ciałem Z_p jest skończona i składa się z n elementów.

3.5 Podprzestrzenie

OKREŚLENIE 3.8.

Niepusty zbiór W przestrzeni wektorowej V nad ciałem F nazywa się podprzestrzenią przestrzeni V, jeśli W jest przestrzenią wektorową nad polem F względem działań dodawania wektorów i mnożenia wektora przez skalar, określonych w przestrzeni W.

TWIERDZENIE 3.2.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby niepusty podzbiór W przestrzeni wektorowej V nad ciałem F był podprzestrzenią przestrzeni V jest to, by dla dowolnych wektorów $\overline{a} \in W$, $\overline{b} \in W$ i dowolnego skalaru $\lambda \in F$ wektory $\overline{a} + \overline{b}$ i $\lambda\overline{a}$ należały do W.

Dowód:

Warunek konieczny.

Jeśli W – podprzestrzeń przestrzeni V, to W razem z dowolnymi dwoma wektorami $\bar{a}$ i $\bar{b}$ powinna zawierać także wektor $\bar{a}+\bar{b}$. W rzeczy samej W, zgodnie z określeniem, jest przestrzenią wektorową nad polem F, przy czym suma wektorów w przestrzeni W pokrywa się z ich sumą w przestrzeni V. Zatem, $\bar{a}+\bar{b}\in W$ i $\lambda\bar{a}\in W$ dla dowolnego $\bar{a}\in W$ i $\lambda\in F$. Warunek konieczny został dowiedziony.

Warunek wystarczający.

Niech dla dowolnych wektorów $\bar{a}\in W$, $\bar{b}\in W$ i dowolnego skalara $\lambda\in F$ wektory $\bar{a}+\bar{b}$ i $\lambda\bar{a}$ należą do W. To znaczy, że w zbiorze W są określone działania dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez skalary ciała F. Właściwości 1-8 tych działań z określenia przestrzeni wektorowej są spełnione, gdyż są spełnione w całym zbiorze V, którego częścią jest W. Twierdzenie zostało w pełni udowodnione.

OKREŚLENIE 3.9.

Niech V – przestrzeń wektorowa nad ciałem F i $\{\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}\}$ - skończony układ wektorów z przestrzeni V. Powłoką liniową układu wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}\}$ nazywa się zbiór wszystkich możliwych kombinacji liniowych wektorów tego układu.

Liniową powłokę wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}\}$ będziemy oznaczać symbolem

$$L(\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}) = \{\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + ... + \alpha_n\overline{a_n}, \alpha_i \in F,\ i = 1,2,\dots,n\}$$

LEMAT 3.6

Powłoka liniowa układu wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}\}$, $\overline{a_i}\in W$, pokrywa się z powłoką liniową maksymalnego liniowo niezależnego podukładu $\{\overline{b_1}, \overline{b_2},..., \overline{b_k}\}$ tego układu.

Dowód:

Oczywiście $L(\overline{b_1}, \overline{b_2},..., \overline{b_k}) \subseteq L(\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n})$, dlatego że $\{\overline{b_1}, \overline{b_2},..., \overline{b_k}\} \subseteq \{\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}\}$. Z drugiej strony, dowolny wektor $\bar{x}\in L(\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n})$ jest kombinacją liniową wektorów $\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}$, a każdy wektor $\overline{a_i}$, $i = 1,2,\dots,n$, jest kombinacją liniową wektorów $\overline{b_1}, \overline{b_2},..., \overline{b_k}$ (lemat 3.1). Na skutek lematu 3.1, $\bar{x}$ jest kombinacją liniową $\overline{b_1}, \overline{b_2},..., \overline{b_k}$, to znaczy $\bar{x}\in L(\overline{b_1}, \overline{b_2},..., \overline{b_k})$.

W ten sposób $L(\overline{b_1}, \overline{b_2},..., \overline{b_k}) \supseteq L(\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n})$. Biorąc pod uwagę włączenie odwrotne otrzymujemy, że:

$$L(\overline{b_1}, \overline{b_2},..., \overline{b_k}) = L(\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}).$$

Lemat został udowodniony.

TWIERDZENIE 3.3

Powłoka liniowa układu wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n}\}$ przestrzeni wektorowej V nad ciałem F jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Dowód:

Niech $W = L(\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n})$, $\bar{x}\in W$, $\bar{y}\in W$ - dowolne wektory z W i λ - dowolny skalar ciała F. Wówczas $\bar{x} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\overline{a_i}$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^{m}\beta_i\overline{a_i}$; dlatego $\bar{x}+\bar{y} = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i+\beta_i)\overline{a_i}\in W$ i $\lambda\bar{x} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overline{a_i}\in W$. Na skutek twierdzenia 2.2, $W = L(\overline{a_1}, \overline{a_2},..., \overline{a_n})$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Okazuje się, że dowolna podprzestrzeń przestrzeni wektorowej V może być przedstawiona jako powłoka liniowa pewnego układu wektorów przestrzeni V. Istotnie, niech W – podprzestrzeń przestrzeni V i $\{\overline{e_1}, \overline{e_2},..., \overline{e_n}\}$ - jej baza. Wtedy jest oczywiste, że $W = L(\overline{e_1}, \overline{e_2},..., \overline{e_n})$.

Zauważmy jeszcze, że wymiar podprzestrzeni W przestrzeni wektorowej V nie przewyższa wymiaru V. Wynika to z lematu 2.4.

LEMAT 3.7

Jeśli U i W – podprzestrzenie przestrzeni wektorowej V, $U \subseteq W$, oraz $\dim U = \dim W$, to $U=W$.

Dowód:

Jeżeli $\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},...,\ \overline{e_n}\}$ - baza przestrzeni U, to na skutek równości wymiaru podprzestrzeni U i V, dany układ wektorów jest bazą przestrzeni W. Dlatego $W = L(\overline{e_1},\ \overline{e_2},...,\ \overline{e_n})$ $=U$, co należało udowodnić.

ZADANIE 3.2

Wykorzystując otrzymane wyniki, obliczymy liczbę wszystkich możliwych baz w przestrzeni V n-wymiarowej nad ciałem Z_p. N skutek wniosku z lematu 3.5, każdy liniowo niezależny układ wektorów przestrzeni V można dodać do bazy całej przestrzeni V. Dlatego dowolną bazę w przestrzeni V będziemy tworzyć w następujący sposób: najpierw bierzemy dowolny układ liniowo niezależny, który składa się z jednego wektora $\{\overline{a_1}\}$. Następnie znajdujemy dowolny liniowo niezależny układ, który zawiera dwa wektory, z których jeden wynosi $\overline{a_1}$: $\{\overline{a_1},\overline{a_2}\}$. Następnie tworzymy dowolny układ liniowo niezależny $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}\}$, który składa się z trzech wektorów i zawiera poprzedni układ $\{\overline{a_1},\overline{a_2}\}$ itd.

Wektorem $\overline{a_1}$ może być dowolny niezerowy wektor przestrzeni V. Ponieważ przestrzeń V zawiera p^n elementów, to wektor $\overline{a_1}$ można wybrać na $p^n - 1$ sposobów. Zgodnie z właściwością 2 zależności liniowej, układ $\{\overline{a_1},\overline{a_2}\}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{a_2} \notin L(\overline{a_1})$, to znaczy $\overline{a_2} \in V - L(\overline{a_1})$. Zbiór $V - L(\overline{a_1})$ zawiera $p^n - p$ elementów (jednowymiarowa podprzestrzeń $L(\overline{a_1})$ składa się z p elementów). W ten sposób, do wyboru układu $\{\overline{a_1},\overline{a_2}\}$ mamy $(p^n - 1)(p^n - p)$ możliwości. Udowodnimy przy pomocy indukcji według k, że liczba wszystkich możliwych liniowo niezależnych układów $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_k}\}$ wynosi $(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2)\dots(p^k - p^{k-1})$. Jeżeli jest to prawdą, to w liniowo niezależnym układzie $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_k},\overline{a_{k+1}}\}$ wektorem $\overline{a_{k+1}}$ może być dowolny wektor ze zbioru $V-L(\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_k})$. Ostatni zbiór zawiera $p^n - p^k$ elementów. Zatem, układ liniowo niezależny $\{\overline{a_1},...,\ \overline{a_k},\overline{a_{k+1}}\}$ można wybrać na $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)\dots(p^n - p^k)$ sposobów. Dlatego do wyboru bazy $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_n}\}$ przestrzeni V istnieje $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)\dots(p^n - p^{n-1})$ możliwości. W trakcie tworzenia otrzymano różne uporządkowane bazy przestrzeni V. Jeśli bazy, które składają się z tych samych wektorów, lub są uporządkowane w różny sposób, uważać za jednakowe, w całej przestrzeni V n-wymiarowej nad ciałem Z_p istnieje $\frac{1}{n!}(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)\dots(p^n - p^{n-1})$ różnych baz.

ZADANIE 3.3

Obliczymy ilość różnych podprzestrzeni k-wymiarowych w przestrzeni wektorowej V n-wymiarowej nad ciałem Z_p. Jak wcześniej podano, dowolną podprzestrzenią U k-wymiarową w przestrzeni V jest powłoka liniowa liniowo niezależnego układu wektorów $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_k}\}$: $U = L(\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_k})$. Zgodnie z poprzednim zadaniem istnieje $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)\dots(p^n - p^{k-1})$ możliwości wyboru układu $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_k}\}$. Przy tym, jeśli $L(\overline{b_1},\ \overline{b_2},...,\ \overline{b_k}) = U$, gdzie $\{\overline{b_1},\ \overline{b_2},...,\ \overline{b_k}\}$ - niezależny liniowo układ wektorów, to układ ten jest bazą podprzestrzeni U. W ten sposób liczba liniowo niezależnych układów $\{\overline{a_1},\ \overline{a_2},...,\ \overline{a_k}\}$, których powłoki liniowe pokrywają się z jedną i tą samą podprzestrzenią wymiaru k, równa się liczbie uporządkowanych baz tej podprzestrzeni, to znaczy zgodnie z poprzednim zadaniem wynosi $(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2)\dots(p^k - p^{k-1})$.

Zatem, ilość wszystkich możliwych podprzestrzeni wymiaru k w n-wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem Z_p wynosi:

$$\frac{(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)...(p^n-p^{k-1})}{(p^k-1)(p^k-p)(p^k-p^2)...(p^k-p^{k-1})}=$$

$$\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)...(p^{n-k+1}-1)}{(p^k-1)(p^{k-1}-1)...(p-1)}$$

LEMAT 3.8

Przecięcie podprzestrzeni U i W przestrzeni wektorowej V nad ciałem F, również jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Dowód:

Niech $T=U\cap B$. Zbiór T jest niepusty, bowiem $\bar{0}\in T$. Jeśli $\bar{a}\in T$, $\bar{b}\in T$ - dwa dowolne wektory ze zbioru T, to $\bar{a}\in U$, $\bar{b}\in U$, a więc $\bar{a}+\bar{b}\in U$, dlatego, że U – podprzestrzeń w przestrzeni V. Rzeczywiście również $\bar{a}+\bar{b}\in W$. A zatem, $\bar{a}+\bar{b}\in T=U\cap W$. Analogicznie dowodzi się, że dla dowolnego wektora $\bar{a}$ i dowolnego skalara $\lambda\in F$, wektor $\lambda\bar{a}\in F$. Zgodnie z twierdzeniem 3.2, T jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej V.

Zauważmy, że połączenie podprzestrzeni U i W przestrzeni wektorowej V będzie podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z nich jest zawarta w drugiej. Warunek wystarczający tego twierdzenia jest oczywisty. W celu udowodnienia warunku koniecznego zaznaczmy, że jeśli U nie zawiera się w W. I W nie zawiera się w U, to istnieje wektor $\bar{a}\in U-W$ i wektor $\bar{b}\in U-W$. Wtedy $\bar{a}\in U\cup W$, $\bar{b}\in U\cup W$, ale $\bar{a}+\bar{b}\not\subset U\cup W$.

Odpowiednikiem działań połączenia dla przestrzeni wektorowej V jest działanie dodawania podprzestrzeni.

OKREŚLENIE 3.10.

Sumą podprzestrzeni U i W przestrzeni wektorowej V nazywa się zbiór E wszystkich możliwych typu $\bar{u}+\bar{w}$, gdzie $\bar{u}\in U$, $\bar{w}\in W$.

Dla sumy podprzestrzeni U i W będziemy używać symbolu $U+W$.

TWIERDZENIE 3.4

Suma podprzestrzeni U i W przestrzeni wektorowej V nad ciałem F jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Dowód:

Ponieważ $\bar{0}\in U\cap W$, to $\bar{0}=\bar{0}+\bar{0}\in U+W$. Niech $\bar{a}\in U+W$, $\bar{b}\in U+W$, wtedy $\bar{a}=\bar{u_1}+\bar{w_1}$, $\bar{b}=\bar{u_2}+\bar{w_2}$. Dlatego $\bar{a}+\bar{b}=(\bar{u_1}+\bar{w_1})+(\bar{u_2}+\bar{w_2})=(\bar{u_1}+\bar{u_2})+(\bar{w_1}+\bar{w_2})\in U+W$, ponieważ $\bar{u_1}+\bar{u_2}\in U$, $\bar{w_1}+\bar{w_2}\in W$. Analogicznie dowodzi się, że dla dowolnego skalaru $\lambda\in F$, $\lambda\in U+W$. Na skutek twierdzenia 3.2, $U+W$ – podprzestrzeń przestrzeni wektorowej V.

Metodą indukcji matematycznej można obliczyć sumę dowolnego skończonego zbioru podprzestrzeni przestrzeni wektorowej V. Nie trudno przy tym udowodnić, że działanie dodawania podprzestrzeni jest łączne, to znaczy $(U_1+U_2)+U_3=U_1+(U_2+U_3)$, gdzie U_i - podprzestrzeń przestrzeni wektorowej V, i=1, 2, 3.

TWIERDZENIE 3.5

Wymiar sumy dwóch podprzestrzeni U i W przestrzeni wektorowej równa się sumie wymiarów podprzestrzeni U i W minus wymiar przecięcia $U\cap W$.

Dowód:

Niech $T=U\cap W$ i niech $\{\bar{e_1},\ \bar{e_2},...,\ \bar{e_k}\}$ – baza podprzestrzeni T. Z tego, że $T\subset U$, wynika, że bazę $\{\bar{e_1},\ \bar{e_2},...,\ \bar{e_k}\}$ można włączyć do bazy podprzestrzeni U.

Niech $\{\bar{e_1},\ \bar{e_2},...,\ \bar{e_k},\ \bar{u_1},\ \bar{u_2},...,\ \bar{u_m}\}$ - baza podprzestrzeni U. Dokładnie tak samo można potraktować bazę $\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},...,\ \overline{e_k},\ \overline{w_1},\ \overline{w_2},...,\ \overline{w_l}\}$ podprzestrzeni W. A zatem, $\dim U = k+m$, $\dim W = k+l$, $\dim U \cap W = k$. W celu dowiedzenia twierdzenia należy ustanowić, że $\dim(U+W)=k+l+m$. Ostatnia równość jest oczywista, jeśli bazą podprzestrzeni $U+W$ jest zbiór:

$$\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},...,\ \overline{e_k},\ \overline{u_1},\ \overline{u_2},...,\ \overline{u_m},\ \overline{w_1},\ \overline{w_2},...,\ \overline{w_l}\} \tag{3.3}$$

Udowodnimy to. Na początku ustanowimy liniową niezależność układu (3.3).
Niech:

$\alpha_1\overline{e_1}+\alpha_2\overline{e_2}+...+\alpha_k\overline{e_k}+\beta_1\overline{u_1}+\beta_2\overline{u_2}+\ ...+\beta_m\overline{u_m}+$

$+\gamma_1\ \overline{w_1}+\gamma_2\overline{w_2}+...+\gamma_l\overline{w_l}=\overline{0}$

Stąd:

$\alpha_1\overline{e_1}+\alpha_2\overline{e_2}+...+\alpha_k\overline{e_k}+\beta_1\overline{u_1}+\beta_2\overline{u_2}\ ...+\beta_m\overline{u_m}=$

$=-\gamma_1\overline{w_1}-\gamma_2\overline{w_2}-...-\gamma_l\overline{w_l}$

Wektor, który znajduje się w lewej części nierówności, należy do U, a wektor z prawej części równości należy do W. To znaczy, że oba te wektory należą do $T=U\cap W$. W ten sposób,

$$-\gamma_1\ \overline{w_1}-\gamma_2\overline{w_2}-...-\gamma_l\overline{w_l}=\delta_1\overline{e_1}+\delta_2\overline{e_2}+...+\delta_k\overline{e_k},$$

ponieważ $\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},...,\ \overline{e_k}\}$ – baza podprzestrzeni T.

Dlatego $\delta_1\overline{e_1}+\delta_2\overline{e_2}+...+\delta_k\overline{e_k}+\gamma_1\ \overline{w_1}+\gamma_2\overline{w_2}+...+\gamma_l\overline{w_l}=\overline{0}$. Z tego, że $\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},...,\ \overline{e_k},\ \overline{w_1},\ \overline{w_2},...,\ \overline{w_l}\}$ – baza podprzestrzeni W, otrzymujemy $\delta_1=\delta_2=...=\delta_k=\gamma_1=\gamma_2=...=\gamma_l=0$. Stąd wynika, że $\alpha_1\overline{e_1}+\alpha_2\overline{e_2}+...+\alpha_k\ \overline{e_k}+\beta_1\overline{u_1}+\beta_2\overline{u_2}+...+\beta_m\ \overline{u_m}=\overline{0}$. Ponieważ $\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},...,\ \overline{e_k},\ \overline{u_1},\ \overline{u_2},...,\ \overline{u_m}\}$ - baza podprzestrzeni U, to $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=\beta_1=\beta_2=...=\beta_m=0$. Zatem, w dowolnej zerowej kombinacji liniowej wektorów $\{\overline{e_1},...,\ \overline{e_k},\ \overline{u_1},...,\ \overline{u_m},\ \overline{w_1},...,\ \overline{w_l}\}$ wszystkie współczynniki równają się zeru, to znaczy, że dany układ wektorów jest liniowo niezależny. Z drugiej strony, dowolny wektor $\overline{x}\in U+W$ można zapisać w postaci $\overline{u}+\overline{w}$, gdzie $\overline{u}\in U$, $\overline{w}\in W$. Z tego, że każdy z wektorów $\overline{u}$ i $\overline{w}$ wyraża się liniowo poprzez układ wektorów $\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},...,\ \overline{e_k},\ \overline{u_1},\ \overline{u_2},...,\ \overline{u_m},\ \overline{w_1},\ \overline{w_2},...,\ \overline{w_l}\}$ wynika, że przez ten układ liniowo wyraża się także wektor $\overline{x}$. Zatem dany układ wektorów jest maksymalnym liniowo niezależnym w przestrzeni $U+W$, to znaczy jest bazą przestrzeni $U+W$.

OKREŚLENIE 3.11.

Suma podprzestrzeni U i W przestrzeni wektorowej V nazywa się prostą, jeśli $U\cap W=\{\overline{0}\}$. Dla prostej sumy podprzestrzeni U i W będziemy używać symbolu $U\oplus W$.

LEMAT 3.9

Jeśli $S=U\oplus W$, to $\dim S=\dim U+\dim W$.

Dowód:

Z tego, że $U\cap W=\{\overline{0}\}$, to $\dim U\cap W=0$, zgodnie z twierdzeniem $\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W$.

TWIERDZENIE 3.6

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, by suma podprzestrzeni U i W przestrzeni wektorowej V była prosta, jest to, by dowolny wektor $\overline{x}\in U+W$ można było przedstawić w jedyny sposób w postaci $\overline{x}=\overline{u}+\overline{w}$, gdzie $\overline{u}\in U$, $\overline{w}\in W$.

Dowód:

Warunek konieczny.

Jeśli $S = U \oplus W$, to $U \cap W = \{\overline{0}\}$. Niech $\overline{x} \in S$; wtedy $\overline{x} = \overline{u_1} + \overline{w_1}$, gdzie $\overline{u_1} \in U$, $\overline{w_1} \in W$. Załóżmy, że $\overline{x} = \overline{u_2} + \overline{w_2}$, gdzie $\overline{u_2} \in U$, $\overline{w_2} \in W$. Stąd otrzymujemy: $\overline{u_1} + \overline{w_1} = \overline{u_2} + \overline{w_2}$, lub $\overline{u_1} - \overline{u_2} = \overline{w_1} - \overline{w_2} \in U \cap W$; W ten sposób $\overline{u_1} - \overline{u_2} = \overline{w_1} - \overline{w_2} = \overline{0}$, a wobec tego $\overline{u_1} = \overline{u_2}$; $\overline{w_1} = \overline{w_2}$. Warunek konieczny został udowodniony.

Warunek wystarczający:

Niech dowolny wektor $\overline{x} \in S = U + W$ można jednoznacznie zapisać w postaci $\overline{x} = \overline{u} + \overline{w}$, gdzie $\overline{u} \in U$, $\overline{w} \in W$. Załóżmy, że $\overline{a} \in U \cap W$. Wektor $\overline{0}$, który należy do podprzestrzeni S=U+W można przedstawić w postaci $\overline{0} = \overline{0} + \overline{0}$, и $\overline{0} = \overline{a} + (-\overline{a})$, przy czym pierwsze składniki w obu równościach należą do podprzestrzeni U, a drugie - podprzestrzeni W. Z jednoznaczności przedstawienia wektora $\overline{0}$ wynika, że $\overline{a} = \overline{0}$.

Twierdzenie udowodniono.

Pojęcie prostej sumy rozciąga się na sumę trzech i więcej podprzestrzeni tak: suma podprzestrzeni $U_1, U_2, \ldots, U_k$ przestrzeni wektorowej V nazywa się prostą, jeśli przecięcie każdej podprzestrzeni U_i z sumą innych podprzestrzeni jest przestrzenią zerową $\{\overline{0}\}$.

Prostą sumę podprzestrzeni $U_1, U_2, \ldots, U_k$,tak jak wyżej, oznacza się poprzez $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Rozważając podobnie jak w twierdzeniu 3.6, można udowodnić, że suma $S = U_1 + U_2 + \ldots + U_k$ jest prostą, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $\overline{x} \in S$ był przedstawiony jednoznacznie w postaci: $\overline{x} = \overline{u_1} + \overline{u_2} + \ldots + \overline{u_k}$, $\overline{u_i} \in U$, i=1, 2, ..., k.

3.6 Warstwy liniowe

OKREŚLENIE 3.12.

Niech U – podprzestrzeń przestrzeni wektorowej V nad pewnym ciałem P i $\overline{x} \in V$. Warstwą liniową w przestrzeni V nazywa się zbiór U+$\overline{x}$, który składa się ze wszystkich możliwych wektorów postaci $\overline{u} + \overline{x}$, $\overline{u} \in U$; U+$\overline{x}$ = $\{\overline{u} + \overline{x} \mid \overline{u} \in U\}$.

Warstwa reprezentuje sobą „przesunięcie” podprzestrzeni U o wektor $\overline{x}$. Jeśli $\overline{x} \notin U$, to warstwa U+$\overline{x}$ nie jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej V, ponieważ w tym przypadku $\overline{0} \notin$ U+$\overline{x}$. Oczywiście, jeśli $\overline{a} \in$ U+$\overline{x}$, $\overline{b} \in$ U+$\overline{x}$, to $\overline{a} - \overline{b} \in U$. Oprócz tego, dowolny wektor $\overline{u} \in U$ można przedstawić w postaci różnicy dwóch wektorów $\overline{a} \in$ U+$\overline{x}$, $\overline{b} \in$ U+$\overline{x}$. Rzeczywiście, $\overline{u} = \overline{a} - \overline{b}$, gdzie $\overline{a} = \overline{u} + \overline{x} \in$ U+$\overline{x}$, $\overline{b} = \overline{0} + \overline{x} \in$ U+$\overline{x}$. Stąd wynika, że jeśli dwie warstwy U+$\overline{x}$ i W+$\overline{y}$ przestrzeni wektorowej V są równe, czyli U+$\overline{x}$ =W+$\overline{y}$, to U=W. W ten sposób, podprzestrzeń liniowa U, o której mówi się w znaczeniu warstwy liniowej, jest jednoznacznie określona tą warstwą. I odwrotnie, w miejsce wektora $\overline{y}$, który określa warstwa U+$\overline{x}$, można wziąć dowolny wektor tej warstwy. W rzeczy samej, jeśli $\overline{y} \in$ U+$\overline{x}$, to $\overline{y} = \overline{u_0} + \overline{x}$, $\overline{u_0} \in U$. Wtedy $\overline{u} + \overline{y} = \overline{u} + (\overline{u_0} + \overline{x}) = (\overline{u} + \overline{u_0}) + \overline{x} \in$ U+$\overline{x}$, lub U+$\overline{y} \subset$ U+$\overline{x}$. Z drugiej strony, jeśli $\overline{z}$ - dowolny wektor z U+$\overline{x}$, to $\overline{z} = \overline{u_1} + \overline{x}$, $\overline{u_1} \in U$. Dlatego $\overline{z} = (\overline{u_1} - \overline{u_0}) + (\overline{u_0} + \overline{x}) = (\overline{u_1} - \overline{u_0}) + \overline{y} \in U + \overline{y}$. Zatem, U+$\overline{x} \subset$ U+$\overline{y}$, a więc U+$\overline{x}$ = U+$\overline{y}$.

4.1 Macierze i działania na nich

Macierzą wymiaru m x n będziemy nazywać tabelę, która składa się z elementów pewnego ciała F i zawiera m wierszy i n kolumn:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \alpha_{ij} \in F \text{, i=1, 2, ...m, j= 1, 2, ...,n}$$

Skalary $\alpha_{ij} \in F$ nazywają się elementami macierzy. Każdy element macierzy zapisuje się przy pomocy dwóch indeksów, z których pierwszy wskazuje numer wiersza, w którym znajduje się dany element, a drugi – numer kolumny. Oczywiście, wszystkie elementy danego wiersza macierzy posiadają jednakowy pierwszy indeks, a wszystkie elementy danej kolumny – jednakowy drugi indeks.

Macierze będziemy oznaczać dużymi literami łacińskimi - *A, B, C* itd. Będziemy mówić, że macierz *A* posiada rozmiar m x n , jeśli *A* zawiera m wierszy, n kolumn. W przypadku $m \neq n$ macierz A nazywa się prostokątną. Jeśli m = n, to macierz *A* nazywa się kwadratową stopnia m (m – liczba wierszy i kolumn macierzy *A*).

Jeśli znane są rozmiary macierzy, to macierz

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$ można zapisać krótko w postaci *A*=(α_{ij}).

Macierze *A* i *B* jednakowego rozmiaru m x n będziemy nazywać równymi, jeśli równe istnieją odpowiadające sobie elementy tych macierzy; w taki sposób, że:

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{bmatrix}$$

i *A*=*B*, to $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ dla dowolnych i, j: i= 1, 2, ..., m; j= 1, 2, ..., n.

OKREŚLENIE 4.1.

Sumą dwóch macierzy *A*=(α_{ij}) i *B*=(β_{ij}) jednakowego rozmiaru m x n nazywa się macierz *C*=(γ_{ij}) takiego samego rozmiaru m x n, której każdy element jest równy sumie odpowiednich elementów danych macierzy:

$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$, i=1, 2, ... m; j=1, 2, ..., n.

Działanie dodawania macierzy oznacza się symbolem „+”: *C=A+B.*

Oczywiście, że działanie dodawania macierzy posiada własności łączności i przemienności:

(A+B)+C=A+(B+C), A+B=B+A

ponieważ te właściwości posiada działanie dodawania elementów ciała *F*.

Macierz rozmiaru m×n, której wszystkie elementy są równe zeru, nazywa się macierzą zerową:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Względem działania dodawania macierzy macierz zerowa *O* jest neutralna, to znaczy dla dowolnej macierzy *A* rozmiaru m×n sprawiedliwa jest równość *A+O=A.* Oprócz tego, jeśli oznaczy się przez *(-A)* macierz, której każdy element jest przeciwnego znaku niż odpowiedni element macierzy *A*, to oczywiście *A+(-A)=0*; *-A*=(- α_{ij}). Macierz - *A* nazywa się macierzą przeciwną do macierzy *A.*

<u>*Uwaga.*</u> Działanie dodawania macierzy różnych wymiarów nie jest określone.

OKREŚLENIE 4.2.

Iloczynem macierzy *A*=(α_{ij}) wymiaru m×n przez skalar $\lambda \in P$, nazywa się macierz *B* wymiaru m×n, której elementy otrzymano z odpowiednich elementów macierzy *A* pomnożonych przez skalar λ:

B=(β_{ij}), gdzie $\beta_{ij} = \lambda\ \alpha_{ij}$, i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ...,n.

Z analogicznych właściwości działań dodawania i mnożenia nad ciałem *F* łatwo jest wyprowadzić następujące właściwości działań na macierzach:

1. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
4. $1 \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}$

Z tych właściwości i przytoczonych wcześniej działań dodawania macierzy wynika, że:

Zbiór macierzy wymiaru m×n z elementami ciała F odwzorowuje przestrzeń wektorową nad tym ciałem względem dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalary z ciała F.

ZADANIE 4.1

Niech *M* – zbiór wszystkich macierzy wymiaru m×n ze współczynnikami z ciała *F*. Oznaczymy przez E_{ij} , i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., n macierz, w której element, który stoi na przecięciu wiersza o numerze i oraz kolumny o numerze j wynosi 1, a wszystkie pozostałe elementy są równe zero. Wykazać, że zbiór *M* jest przestrzenią wektorową wymiaru m×n nad ciałem *F*, a zbiór macierzy { E_{ij} }, i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., n, jest jego bazą.

OKREŚLENIE 4.3

Niech *A*= $(\overline{a_1}, \overline{a_2} ..., \overline{a_k})$ macierz wymiaru 1×k (macierz-wierszowa) i *B*= $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$ macierz wymiaru k×1 (macierz-kolumnowa).

Mnożeniem macierzy *A* i *B* nazywa się skalar γ, który jest równy $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_k\beta_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\beta_i$.

Zwróćmy uwagę, że mnożenie macierzy-wierszowej przez macierz-kolumnową można przeprowadzić tylko w tym przypadku, kiedy posiadają one taką samą liczbę elementów (k elementów).

OKREŚLENIE 4.4

Niech *A*=(α_{ij}) macierz wymiaru m×k, a *B*=(β_{ij}) macierz wymiaru k×n. Iloczynem macierzy *A* przez macierz *B* nazywa się macierz *C=A×B* wymiaru m×n, w której element γ_{ij} równa się iloczynowi wiersza macierzy o numerze i przez kolumnę macierzy *B* o numerze j:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + ... + \alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{ir}\beta_{rj}.$$

UWAGA

Iloczyn macierzy $A \times B$ określono tylko w takim przypadku, gdy liczba kolumn w lewym czynniku A równa się liczbie wierszy w prawym czynniku B. W tym przypadku liczba elementów dowolnego wiersza macierzy A równa się liczbie elementów dowolnej kolumny macierzy B.

Z tej uwagi wynika, że jeśli $m \neq n$, to iloczyn $A \times B$ macierzy A wymiaru m×k przez macierz B wymiaru k×n jest określony, ale iloczyn $B \times A$ nie jest określony (m$\neq$ n).

Jeśli jednak m=n, ale $m \neq k$, to określone są oba iloczyny $A \times B$ i $B \times A$, $A \times B$ i $B \times A$ macierze kwadratowe, przy czym macierz $A \times B$ jest rzędu m, a macierz $B \times A$ – rzędu k. Ponieważ $m \neq k$, to macierzy $A \times B$ i $B \times A$ porównywać nie wolno. Pytanie o równość $A \times B$ i $B \times A$ nie ma sensu.

Jak to jest przyjęte w tekstach matematycznych, znak mnożenia będziemy często opuszczać.

Rozpatrzymy w końcu przypadek, gdy m=n=k, to znaczy A i B – macierze kwadratowe rzędu m. W tym przypadku AB i BA są określone i obie posiadają rząd m. Ale dla m>1 równość $AB=BA$ w ogólnym przypadku nie jest spełniona.

W rzeczy samej, jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, i $AB \neq BA$.

A zatem, działanie mnożenia w zbiorze macierzy kwadratowych jednakowego wymiaru, jest ogólnie biorąc nieprzemienne.

Zauważmy jeszcze jedną osobliwość operacji mnożenia macierzy, która demonstruje różnicę między nią a operacją mnożenia elementów ciała, a szczególnie: iloczyn dwóch niezerowych macierzy może być macierzą zerową. Innymi słowy, w zbiorze macierzy kwadratowych są dzielniki zera.

Zatem w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia m określone są działania dodawania oraz mnożenia przez skalar ciała podstawowego, oraz mnożenia macierzy.

PRZYKŁAD

Rozpatrzmy trzy macierze na ciele R:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie trzy macierze nie są zerowe, ale

$$E_{11}E_{22} = E_{22}E_{11} = 0,\; E_{11}E_{12} = E_{12},\; E_{12}E_{11} = 0,\; E_{22}E_{12} = 0,\; E_{12}E_{22} = E_{12}.$$

Na równi z danymi „nieprzyjemnymi" własnościami, to znaczy: nieprzemiennością i występowaniem dzielników zera, działanie mnożenia macierzy posiada tak ważną właściwość, jak łączność działania (gdy wszystkie działania mnożenia są określone):

$$A(BC)=(AB)C$$

Udowodnimy tę równość.

Niech $A=(\alpha_{ij})$ – macierz o wymiarze m×k , a $B=(\beta_{ij})$ – macierz o wymiarze k×l i $C=(c_{ij})$ – macierz o wymiarze l×n.

Niech p_{ij} - dowolny element macierzy AB o wymiarze m×l; wtedy $p_{ij} = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{ir}\beta_{rj}$. Jeśli σ_{ij} - dowolny element macierzy $(AB)C$ o wymiarze m×n, to $\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^{l} p_{is}\gamma_{sj} = \sum_{s=1}^{l} (\sum_{r=1}^{k} \alpha_{ir}\beta_{rj})\gamma_{sj} =$

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k} \alpha_{ir}\beta_{rs}\gamma_{sj} = \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} (\beta_{rs}\gamma_{sj})\alpha_{ir} =$$

$$\sum_{r=1}^{k} (\sum_{s=1}^{l} \beta_{rs}\gamma_{sj})\alpha_{ir} = \sum_{r=1}^{k} \tau_{rj}\alpha_{ir} = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{ir}\tau_{rj} = \mu_{ij}$$

Tutaj $\tau_{rj} = \sum_{s=1}^{l} \beta_{rs}\gamma_{sj}$ – element macierzy *BC*, który znajduje się na przecięciu wiersza o numerze r i kolumny o numerze j. Stąd wynika, że $\mu_{ij} = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{ir}\tau_{rj}$ jest elementem macierzy *A(BC)* z i-ego wiersza oraz j-ej kolumny. Z tego, że $p_{ij} = \mu_{ij}$ dla i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., n, otrzymamy *(AB)C=A(BC)*, co było do udowodnienia.

Dodawanie i mnożenie macierzy związane są z prawem rozdzielności:

A(B+C)=AB+ACC; *(A+B)C=ACC+BC.*

Ma się na uwadze to, że wszystkie pokazane w tych równościach działania są spełnione. Obie równości są spełnione jednakowo. Udowodnimy jedną z nich, na przykład pierwszą.

Niech *A*=(a_{ij}) – macierz wymiaru k×m , a *B*=(b_{ij}) i *C*=(c_{ij}) – macierze wymiaru m×n. Wtedy, jeśli λ_{ij} - dowolny element macierzy *B+C*, to $\lambda_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$. Niech α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} - dowolne elementy macierzy *A(B+C), AB, ACC* – odpowiednio. Wtedy, z określenia iloczynu macierzy: $\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}\lambda_{rj}$; $\beta_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}b_{rj}$; $\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}c_{rj}$. Ponieważ $\lambda_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, to $\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}\lambda_{rj}$ = $\sum_{r=1}^{m} a_{ir}(b_{rj} + c_{rj}) = \sum_{r=1}^{m}(a_{ir}b_{rj} + a_{ir}c_{rj}) = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}b_{rj} + \sum_{r=1}^{m} a_{ir}c_{rj} = \beta_{ij} + \gamma_{ij}$, a zatem, *A(B+C)=AB+ACC.*

Niech *A* – macierz stopnia n, n=$S_1 + S_2 + \ldots + S_t$, 1<S_i <n, i=1, 2, ..., t. Rozbijemy macierz *A* na komórki: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{t1} & A_{t2} & \ldots & A_{tt} \end{bmatrix}$, gdzie A_{ij} – macierz o rozmiarze $S_i \times S_j$; oraz j=1, 2, ..., t. Oczywiście A_{ii} - macierz kwadratowa rzędu c. Macierze A_{ij} nazywają się komórkami macierzy *A*, a sama macierz *A* - komórkową.

Niech B – macierz rzędu n i $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{t1} & B_{t2} & \ldots & B_{tt} \end{bmatrix}$ - rozbicie macierzy *B* na komórki, która ma ten sam układ co rozbicie macierzy *A*, to znaczy komórka B_{ij} ma rozmiar $S_i \times S_j$, i, j=1, 2, ..., t. Oczywiście, dla dowolnych i, j, k=1, 2, ..., t są określone iloczyny komórek *AB*. Niech $r_0 = 0$, $r_1 = S_1$, $r_2 = S_1 + S_2$, ... $r_i = S_1 + S_2 + \ldots + S_i$, ..., $r_t = S_1 + S_2 + \ldots + S_t$.

LEMAT 4.1

Iloczyn macierzy komórkowych *AB* jest macierzą komórkową.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{t1} & C_{t2} & \ldots & C_{tt} \end{bmatrix},$$

gdzie $C_{km} = \sum_{j=1}^{t} A_{kj}B_{jm}$; k, m =1, 2, ..., t.

Dowód:

Niech *A*=(α_{ij}), *B*=(β_{ij}); rozbijemy macierz *C*=*AB* na komórki C_{ij} zgodnie z takim układem, w którym zostaną rozbite na komórki czynniki A i B, a szczególnie rozmiar komórki C_{ij} równa się $S_i \times S_j$, i, j=1, 2, ..., t. Niech C_{km} - dowolna komórka macierzy *C* oraz γ_{uv} - jej dowolny element, u=1, 2, ..., S_k, v=1, 2, ..., S_m. Ponieważ $S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1} = r_{k-1}$, to γ_{uv} jest elementem wiersza o numerze $w = r_{k-1} + u$. Dokładnie także γ_{uv} znajduje się w kolumnie macierzy *C* o numerze $z = r_{k-1} + v$. To znaczy, że zgodnie z określeniem iloczynu macierzy *A* i *B*, $\gamma_{uv} = \sum_{j=1}^{n} a_{wj} b_{jz} = = \sum_{j=1}^{r_1} a_{wj} b_{jz} + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} a_{wj} b_{jz} + \ldots + \sum_{j=r_{t-1}+1}^{r_t} a_{wj} b_{jz}$ ($z_t = n$).

Oznaczymy przez γ_{uv}^p element $\sum_{j=r_{p-1}+1}^{r_p} a_{wj} b_{jz}$, p=1, 2, ..., t. Wtedy $\gamma_{uv} = \sum_{p=1}^{t} \gamma_{uv}^p$, przy tym nietrudno zauważyć, że γ_{uv}^p jest elementem macierzy $A_{kp} B_{pm}$, który znajduje się na przecięciu wiersza o numerze u, i kolumny o numerze v. Na skutek dowolności indeksów u i v, $1 \le u \le S_k$, $1 \le v \le S_m$ oraz relacji $\gamma_{uv} = \sum_{p=1}^{t} \gamma_{uv}^p$, $\gamma_{uv} \in C_{km}$, otrzymujemy $C_{km} = \sum_{p=1}^{t} A_{kp} B_{pm}$, co należało udowodnić.

OKREŚLENIE 4.5

Macierz kwadratowa *D*=(d_{ij}) rzędu m nazywa się diagonalną, jeśli d_{ij} =0, i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., m, $i \neq j$. Macierz diagonalna *D* posiada następującą postać:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{mm} \end{bmatrix}$$

Wszystkie elementy macierzy diagonalnej, które znajdują się poza przekątną są równe zeru (przekątną główną nazywa się przekątną macierzy kwadratowej, która łączy jej lewy górny „wierzchołek” z prawym dolnym).

<u>Uwaga.</u> Oczywiście, w macierzy diagonalnej niektóre elementy przekątnej głównej również mogą równać się zero. W szczególności, zerowa macierz kwadratowa (macierz, której wszystkie elementy są równe zeru) również jest diagonalna.

Jeśli *A*=(α_{ij}) – macierz o wymiarze k × m, to poprzez bezpośrednie sprawdzenie można upewnić się, że

$$AD = \begin{bmatrix} \alpha_{11} d_{11} & \alpha_{12} d_{22} & \ldots & \alpha_{1m} d_{mm} \\ \alpha_{21} d_{11} & \alpha_{22} d_{22} & \ldots & \alpha_{2m} d_{mm} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k1} d_{11} & \alpha_{k2} d_{22} & \ldots & \alpha_{kn} d_{mm} \end{bmatrix}$$

W ten sposób, przy mnożeniu macierzy *A* o wymiarze k×m z prawej strony przez diagonalną macierz *D* rzędu d, wszystkie elementy j-ej kolumny macierzy *A* są mnożone przez element d_{jj}, j=1, 2, ..., m. Analogicznie, jeśli macierz *B* o rozmiarze m x n pomnoży się z lewej strony przez macierz diagonalną *D* rzędu m, to wszystkie elementy r-go wiersza zostaną pomnożone przez d_{rr}, r= 1. 2, ..., k.

OKREŚLENIE 4.6

Macierz diagonalna *S* nazywa się skalarną, jeśli wszystkie elementy jej przekątnej głównej są równe.

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}$$

Przy mnożeniu macierzy *A* danego wymiaru na lewo i na prawo przez macierz skalarną S wszystkie elementy macierzy A są mnożone przez skalar α: $AS=\alpha A$; $SA=\alpha A$.

<u>*Uwaga.*</u> Ostatnia równość potwierdza nazwę „skalarna” dla macierzy *S*. Macierze skalarne w operacji mnożenia zachowują się jak skalary w operacji mnożenia przez skalar.

OKREŚLENIE 4.7

Macierz diagonalna *E* nazywa się jednostkową, jeśli wszystkie elementy jej przekątnej głównej są równe 1.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ macierz jednostkowa jest skalarną i odpowiedni dla niej skalar α równa się 1, to prawdziwa jest równość

$$EA=A,\ BE=B$$

(jeśli działania mnożenia w danych równościach są spełnione).

W szczególności, jeśli *E* jest rzędu m i A – dowolna macierz kwadratowa takiego samego rzędu, to $AE=EA=A$, tymi równościami wyjaśniona jest nazwa „jednostkowa” dla macierzy *E*.

OKREŚLENIE 4.8

Macierz kwadratowa *A* nazywa się macierzą, która posiada macierz odwrotną, jeśli istnieje macierz kwadratowa *B* taka, że $AB=BA=E$.
Przy tym macierz B nazywa się odwrotną do macierzy *A*.

Oczywiście, jeśli macierz *B* jest odwrotna do macierzy *A*, to *B* także jest macierzą, która posiada odwrotną do niej macierz *A*. Dlatego macierze *A* i *B* nazywają się wzajemnie odwrotnymi.

LEMAT 4.2

Jeśli macierz *A* posiada macierz odwrotną *B*, to ta odwrotna macierz jest jedyna.

Dowód:

Niech *B* i *C* dwie macierze, które są odwrotne do macierzy *A.* Wtedy zgodnie z określeniem $BA=AC=E$. Dlatego $(BA)C=EC=C$. Z drugiej strony, $(BA)C=B(AC)=BE=B$. Zatem: $B=C$.

PRZYKŁAD 4.2

Macierz diagonalna

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm} \end{bmatrix},$$

w której żaden element przekątnej głównej nie równa się zero, posiada macierz odwrotną *T*, która ma postać:

$$T = \begin{bmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mm}^{-1} \end{bmatrix}$$

Jest oczywistym, że zerowa macierz kwadratowa nie posiada macierzy odwrotnej (podobnie, jak element zerowy w polu nie posiada elementu odwrotnego). Ale także macierz zerowa może nie mieć macierzy odwrotnej. W sposób bezpośredni można sprawdzić, że macierz diagonalna rzędu m, m>1, nie będzie posiadać macierzy odwrotnej, jeśli przynajmniej jeden element jej przekątnej głównej równa się zero. Konieczne i wystarczające warunki odwrotności macierzy kwadratowej zostaną podane później.

OKREŚLENIE 4.9

Macierz kwadratowa *A*=(α_{ij}) o wymiarze m x m nazywa się górną (dolną) macierzą trójkątną, jeśli α_{ij} =0 dla i>j (dla i<j), i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., m.

W ten sposób, jeżeli *A* jest górną macierzą trójkątną, to *A* ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}.$$

Analogicznie, jeśli *B* – dolna macierz trójkątna, to:

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm} \end{bmatrix}.$$

Oczywiście, że macierze diagonalne i tylko one, są zarówno macierzami trójkątnymi górnymi, jak i trójkątnymi dolnymi. Wykażemy, że iloczyn dowolnej liczby macierzy trójkątnych górnych (dolnych) także jest macierzą trójkątną górną (dolną). Wystarczy sprawdzić to dla przypadku dwóch czynników *A* i *B*.

Niech *A*=(α_{ij}), *B*=(β_{ij}) – dwie górne macierze trójkątne rzędu m. Zgodnie z określeniem górnej macierzy trójkątnej dla i>j, $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ =0. Niech c_{ij} - dowolny element macierzy *AB*. Wtedy $c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}$. Niech i>j. Jeśli i>r, to a_{ir} =0 i $a_{ir} b_{rj}$ =0; mimo że i<r, to r>i>j i wtedy b_{rj} =0. W ten sposób, każdy składnik w sumie $\sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}$ jest równy zeru dla i>j, to znaczy c_{ij} =0 dla i>j. Zatem macierz *AB* jest górną macierzą trójkątną. Analogicznie dowodzi się odpowiednie twierdzenie dla dolnych macierzy trójkątnych.

OKREŚLENIE 4.10

Niech macierz *A*=(a_{ij}) posiada wymiar k x m. Macierz *B*=(b_{rs}) o wymiarze m x k nazywa się transponowaną względem macierzy *A*, jeśli $b_{rs} = a_{sr}$, s=1, 2, ..., k, r=1, 2, ..., m. Macierz, transponowaną względem macierzy *A* oznacza się przez A^t .

W taki sposób, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & ... & \alpha_{km} \end{bmatrix}, \text{ to } A^t = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & ... & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{k2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & ... & \alpha_{km} \end{bmatrix}$$

Ma miejsce następująca własność:

$(AB)^t = B^t A^t$, to znaczy macierz, transponowana iloczynu dwóch macierzy, równa się iloczynowi w odwrotnym porządku macierzy transponowanych czynników.

Wykażemy tę własność. Niech $A=(a_{ij})$ jest macierzą o wymiarze k × m, $B=(b_{rs})$ – macierzą o wymiarze m × n. Jeśli c_{ij} - dowolny element macierzy *AB*, to $c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}$.

Niech $A^t=(u_{rs})$, r=1, 2, ..., m; s=1, 2, ..., k; $B^t=(v_{rs})$, r=1, 2, ..., n; s=1, 2, ..., m; $u_{rs}=a_{sr}$, $v_{rs}=b_{sr}$. Jeżeli liczba wierszy macierzy *B* równa się liczbie kolumn macierzy *A*, to liczba kolumn macierzy B^t równa się liczbie wierszy macierzy A^t.

Zatem, iloczyn B^tA^t został określony i jeśli d_{ij} jest dowolnym elementem tego iloczynu, to $d_{ij} = \sum_{t=1}^{m} v_{it} u_{tj} = \sum_{t=1}^{m} b_{ti} a_{jt} = \sum_{t=1}^{m} a_{jt} b_{ti} = c_{ij}$.

Ponieważ wymiary macierzy $(AB)^t=(h_{ij})$, $h_{ij}=c_{ij}$ oraz macierzy $B^t A^t=(d_{ij})$ są zgodne, przy czym $h_{ij}=c_{ij}=d_{ij}$, to równość $(AB)^t=B^t A^t$ została udowodniona.

4.2 Macierze elementarne

W poprzednim rozdziale były omówione macierze E_{ij}. Przypomnijmy ich określenie: E_{ij} – to macierz dowolnego wymiaru, w której element, który znajduje się na przecięciu wiersza o numerze i oraz kolumny o numerze j wynosi 1, a wszystkie pozostałe elementy są równe zero. Bezpośrednio z określenia iloczynu macierzy otrzymujemy, że

$$E_{ij} E_{rs} = \begin{cases} 0, \text{ gdy } j \neq r \\ E_{is}, \text{ gdy } j = r \end{cases} \qquad (4.1)$$

Symbolem *0* jest oznaczona macierz zerowa.

OKREŚLENIE 4.11

Macierz kwadratowa *A* stopnia m nazywa się elementarną, jeśli $A=E+\lambda E_{ij}$, gdzie $1 \le i \le m$, $1 < j < m$, $i \neq j$.

Będziemy oznaczać $A=E+\lambda E_{ij}$ przez $F_{ij}(\lambda)$.

Oczywiście, że dowolna macierz elementarna jest albo górną, albo dolną macierzą trójkątną, w której wszystkie elementy głównej przekątnej równają się 1.

*TWIERDZENIE 4.1 (*Podstawowa własność $F_{ij}(\lambda)$).

Wynik mnożenia macierzy $F_{ij}(\lambda)$ z lewej przez dowolną macierz *A* (o odpowiednim wymiarze) jest przekształceniem elementarnym wierszy macierzy *A:*

$$F_{ij}(\lambda) \cdot A = F_{ij}(\lambda)(A)$$

Sformułujmy bez dowodów niektóre ważne własności macierzy elementarnych:

Własność 4.1

$F_{ij}(\lambda)F_{ij}(\mu) = F_{ij}(\lambda+\mu)$, w szczególności $F_{ij}(\lambda)F_{ij}(\mu) = F_{ij}(\mu)F_{ij}(\lambda)$

Własność jest bezpośrednim następstwem twierdzenia 4.1

Własność 4.2.

Macierz $F_{ij}(\lambda)$ posiada macierz odwrotną $F_{ij}(-\lambda)$.

Własność jest bezpośrednim następstwem twierdzenia 4.1

Własność 4.3

Dla $j \neq k$

$$F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(-\lambda)F_{ki}(-\mu) = F_{kj}(-\mu\lambda)$$

Własność jest bezpośrednim następstwem twierdzenia 4.1

Własność 4.4.

$$F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)F_{ki}(-\mu)F_{ij}(-\lambda)=F_{kj}(\mu\lambda)\ ,\ j\neq k\ .$$

Własność jest bezpośrednim następstwem twierdzenia 4.1

Własność 4.5.

$$F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)=F_{kj}(-\mu\lambda)F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)\ ;$$
$$F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)=F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)F_{kj}(-\mu\lambda)\ ;$$
$$F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)=F_{kj}(\mu\lambda)F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)\ ;$$
$$F_{ki}(\mu)F_{ij}(\lambda)=F_{ij}(\lambda)F_{ki}(\mu)F_{kj}(\mu\lambda)\ ,\ j\neq k$$

Własność jest bezpośrednim następstwem twierdzenia 4.1

Własność 4.6.

Własność jest bezpośrednim następstwem twierdzenia 4.1

Własność 4.8

Jeśli D – macierz diagonalna, $D=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k E_{kk}$, $\gamma_1\cdot\gamma\cdot\ldots\cdot\gamma_m\neq 0$, to $F_{ij}(\mu)D=DF_{ij}(\mu\gamma_i^{-1}\gamma_j)$, $DF_{ij}(\mu)=F_{ij}(\mu\gamma_j\gamma_i^{-1})D$.

Własność jest bezpośrednim następstwem twierdzenia 4.1

OKREŚLENIE 4.12.

Oznaczmy przez *E(i, j)* macierz $E-E_{ii}-E_{jj}$. Będziemy nazywać normalną macierz następującej postaci:

$$L_{ij}(\lambda)=E(i,j)+\lambda E_{ij}-\lambda^{-1}E_{ji}\ ;$$

tu ma się na uwadze, $i\neq j,\lambda\neq 0$.

Z określenia wynika, że $L_{ji}(\lambda)=L_{ij}(-\lambda^{-1})$.

Własność 4.9.

Jeśli $i\neq j$, to $L_{ij}(\lambda)L_{ij}(\mu)=D=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k E_{kk}$, gdzie $\gamma_i=-\lambda\mu^{-1}$, $\gamma_j=-\lambda^{-1}\mu$, $\gamma_k=1$ dla $k\neq i$, $k\neq j$.

Własność 4.10

Macierz normalna $L_{ij}(\lambda)$ posiada macierz odwrotną $L_{ij}(-\lambda)$.

Ta własność jest następstwem poprzedniej

Własność 4.11

Jeśli $i\neq j$, to $F_{ij}(\lambda)\ F_{ji}(-\lambda^{-1})\ F_{ij}(\lambda)=L_{ij}(\lambda)$.

Własność 4.12

$F_{ij}(\lambda)\ F_{ji}(-\lambda^{-1})=L_{ij}(\lambda)\ F_{ij}(-\lambda)$.

Własność 4.13

Jeśli $k\neq j$, to

$$L_{ij}(\lambda)\ F_{ik}(\mu)\ L_{ij}(-\lambda)=F_{jk}(-\lambda^{-1}\mu)\ ;$$
$$L_{ij}(\lambda)\ F_{ki}(\mu)\ L_{ij}(-\lambda)=F_{kj}(-\lambda\mu)$$

Własność 4.14

Jeśli $k \neq i$, $i \neq m$, $k \neq j$, $j \neq \mu$, to

$$L_{ij}(\lambda)\, F_{km}(\mu)\, L_{ij}(-\lambda) = F_{km}(\mu)$$

Własność 4.15

$$L_{ij}(\lambda)\, F_{ij}(\mu)\, L_{ij}(-\lambda) = F_{ji}(-\lambda^{-2}\mu)\,;$$
$$L_{ij}(\lambda)\, F_{ji}(\mu)\, L_{ij}(-\lambda) = F_{ij}(-\lambda^{-2}\mu)$$

Własność 4.16

Jeśli *D* – macierz diagonalna, *D*=$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k E_{kk}$, $\gamma_1 \cdot \gamma \cdot ... \cdot \gamma_m \neq 0$, to

$$L_{ij}(\lambda)\, D = D\, L_{ij}(\lambda \gamma_i^{-1} \gamma_j)\,.$$

Własność 4.17

Jeśli $k \neq j$, to

$$L_{ij}(\lambda)\, L_{ik}(\mu) = L_{jk}(-\lambda^{-1}\mu)\, L_{ij}(\lambda)\,;\; L_{ij}(\lambda)\, L_{ik}(\mu) = L_{ik}(\mu)\, L_{kj}(-\lambda^{-1}\mu)\,. \qquad (4.2)$$

Własność 4.18

Jeśli $k \neq j$, to

$$L_{ij}(\lambda)\, L_{ki}(\mu) = L_{kj}(-\lambda\mu)\, L_{ij}(\lambda)\,;\; L_{ij}(\lambda)\, L_{ki}(\mu) = L_{ki}(\mu)\, L_{kj}(-\lambda\mu)\,.$$

Rozdział 5. Rząd macierzy

5.1. Wierszowy i kolumnowy rząd macierzy

Niech A – macierz o wymiarze m×n o współczynnikach z pewnego ciała F. Oczywiście, wiersze macierzy A można rozpatrywać jako wektory przestrzeni liniowej F^n. Analogicznie kolumny tej macierzy można rozpatrywać jako wektory przestrzeni F^m. Na przykład, jeśli:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

to jej wiersze można rozpatrywać jako wektory (1, 3, 0, 0), (-1, 0, 1, 3) i (2, 2, 1, 1) w przestrzeni R^4. Tak samo kolumny macierzy A są wektorami (1, -1, 2), (3, 0, 2), (0, 1, 1), (0, 3, 1) w R^3. Dlatego będziemy mówić o kombinacjach liniowych wierszy (kolumn), ich zależności lub niezależności liniowej, itd.

OKREŚLENIE 5.1

Wierszowym rzędem macierzy A nazywa się rząd jej układu wektorów-wierszy. Analogicznie określa się kolumnowy rząd macierzy A jako rząd jej układu wektorów-kolumn.

TWIERDZENIE 5.1

Kolumnowy (wierszowy) rząd macierzy A nie zmienia się po pomnożeniu tej macierzy z lewej i z prawej przez dowolną macierz H danego wymiaru, która posiada macierz odwrotną.

Dowód:

Niech *A*=(a_{ij}) macierz o wymiarze m×n. Oznaczymy przez $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ - jej wektory-kolumny: $\overline{a}_j =$ ($a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$), j=1, 2, ..., n. Rozpatrzymy zerową kombinację liniową wektorów $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$: $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \overline{a}_j = \overline{0}$. Dowolna współrzędna wektora $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \overline{a}_j$ równa się zero, to znaczy $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \overline{a}_j = \overline{0}$, i=1, 2, ..., m Otrzymane relacje można zapisać w postaci macierzowej następująco: $A\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pomnożymy teraz z lewej otrzymaną równość przez macierz *H* rzędu m.

$$H\left[A\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}\right] = H\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Oczywiście, } H\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczywszy iloczyn HA przez B oraz stosując łączność iloczynu macierzy, otrzymamy:

$$(HA)\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

Liczba kolumn w macierzy $HA=B$ równa się liczbie n. Oznaczymy przez $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n}$ wektory-kolumny macierzy B. Relacja (5.1) oznacza, że $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \overline{b}_j = \overline{0}$. W ten sposób, jeśli pewna kombinacja liniowa wektorów-kolumn macierzy A jest zerowa $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \overline{a}_j = \overline{0}$, to taka sama kombinacja liniowa wektorów-kolumn macierzy B również jest zerowa $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \overline{b}_j = \overline{0}$. Zgodnie z lematem 3.4, kolumnowy rząd macierzy B jest nie większy niż kolumnowy rząd macierzy A. Z drugiej strony $A=H^{-1}B$ i zgodnie z dowodem rząd kolumnowy A jest nie większy niż B. Zatem, kolumnowe rzędy macierzy A i B *pokrywają się*. A więc, rząd kolumnowy nie zmienia się przy mnożeniu macierzy A z lewej przez macierz, która posiada macierz odwrotną.

Niech teraz $C=AH$, gdzie $H=(h_{ij})$ – macierz rzędu m, która posiada macierz odwrotną. Wtedy, jeśli $\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_n}$ - wektory-kolumny macierzy C, to $\overline{c_i} = \sum_{j=1}^{m} h_{ji} \overline{a_j}$. W taki sposób układ wektorów-kolumn macierzy C wyraża się liniowo poprzez układ wektorów-kolumn macierzy A. Dlatego, zgodnie z lematem 2.2, kolumnowy rząd macierzy C jest nie większy od kolumnowego rzędu macierzy A. Z tego, że macierz H posiada macierz odwrotną wynika, że $A=CH^{-1}$ i zgodnie z dowodem kolumnowy rząd macierzy A jest nie większy od kolumnowego rzędu macierzy C. Zatem, ich rzędy kolumnowe są równe. Analogicznie dowodzi się równości rzędów wierszowych.

OKREŚLENIE 5.2

Macierzą stopniowaną będziemy nazywać taką macierz $A=(a_{ij})$ o wymiarze m x n, która spełnia następujące warunki:

1. Jeśli $a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{ik-1}$, ale $a_{ik} \neq 0$, to $a_{lj} = 0$ dla wszystkich $l > i$ i $j \leq k$;
2. Jeśli wiersz j macierzy A - zerowy, to wszystkie wiersze tej macierzy o numerach większych niż j, są także zerowe.

PRZYKŁAD 5.1

Stopniowaną będzie na przykład, macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz zerową także będziemy nazywać stopniowaną.

***TWIERDZENIE* 5.2**

Rząd wierszowy macierzy stopniowanej jest równy rzędowi kolumnowemu i stanowi liczbę niezerowych wierszy tej macierzy.

Dowód:

Niech $A=(a_{ij})$ – macierz klatkowa o wymiarze m×n i k – liczba wierszy zerowych macierzy A, $0 \leq k \leq m$. Jeśli k=0, to macierz A – zerowa, a jej rzędy: wierszowy i kolumnowy są równe zero. W tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że $k \geq 1$. Ponieważ układ liniowo niezależny wektorów nie zawiera wektora zerowego, to rząd wierszowy macierzy A nie jest większy od k. Aby udowodnić, że ten rząd równa się k, ustanowimy liniową niezależność pierwszych k wierszy macierzy A. Oznaczymy te wiersze przez $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}$. Niech $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \overline{a_i} = \overline{0}$. Załóżmy, że s to taki numer, dla którego $a_{1s} \neq 0$, $a_{1i} = 0$ dla i<s. Zgodnie z określeniem macierzy stopniowanej: $a_{js} = 0$ dla wszystkich j>1. Wynotujemy s-tą współrzędną wektora $\sum_{i=1}^{k}\mu_i\overline{a_i}=0$: 0=$\sum_{i=1}^{k}\mu_i a_{is}$ =$\mu_1 a_{1s}$, ponieważ $a_{js}=0$ dla j>1. Z warunku $a_{1s}\neq 0$ otrzymujemy, że $\mu_1=0$. Niech już udowodniono, że $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_{l=1}=0$. Założymy, że μ_1 także wynosi zero. Niech r, to taka liczba naturalna, że $a_{lr}\neq 0$, ale $a_{li}=0$ dla i<r, wtedy $a_{ji}=0$ dla wszystkich j>r, $i\le r$. Dlatego r-ta współrzędna wektora $\sum_{i=1}^{k}\mu_i\overline{a_i}=\overline{0}$ wynosi: 0=$\sum_{i=1}^{k}\mu_i a_{ir}$ =$\sum_{i=1}^{l-1}\mu_i a_{ir}+\mu_1 a_{1r}$+$\sum_{i=1}^{k}\mu_i a_{ir}$. Pierwsza suma w prawej części otrzymanej relacji równa się zero, ponieważ $\mu_i=0$ dla i<l; ostatnia suma także równa się zero, gdyż $a_{ir}=0$ dla i>1. Dlatego $\mu_1 a_{1r}=0$, i ponieważ $a_{lr}\neq 0$, to $\mu_l=0$. W taki sposób, założenie indukcji sprawdziło się i $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_k=0$. Zatem, układ pierwszych k wektorów-wierszy jest liniowo niezależny a kolumnowy rząd macierzy A równa się k. W celu udowodnienia tego, że kolumnowy rząd macierzy A także równa się k, rozpatrzymy macierz B, którą otrzymuje się z macierzy A poprzez przestawienie kolumn; przy tym kolumna macierzy A, która zawiera pierwszy zerowy element j-tego wiersza macierzy A, staje się j-tą kolumną macierzy B, j<k; pozostałe kolumny znajdują się w macierzy B po kolumnie o numerze k w dowolnym porządku. A zatem, macierz B ma postać:

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{kk} & \ldots & b_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

tu $b_{ii}\neq 0$ dla i=1, 2, ..., k. Oczywiście, kolumnowe rzędy macierzy A i B są równe. Jest jasnym, że kolumny macierzy B wyrażają się liniowo poprzez układ wektorów $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_k}\}$ przestrzeni wektorowej F^n (F – ciało podstawowe), gdzie $\overline{e_j}$ - wektor w przestrzeni F^n, którego i-ta współrzędna równa się 0. Z lematu 2.2 wynika, że kolumnowy rząd macierzy B jest nie większy niż k. W celu udowodnienia tego, że kolumnowy rząd tej macierzy równa się k, ustanowimy liniową niezależność jej pierwszych k kolumn. Oznaczymy dane kolumny przez $\overline{b_1},\overline{b_2},\ldots,\overline{b_k}$ i rozpatrzymy zerową kombinację liniową tych wektorów: $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{b_i}=\overline{0}$. Załóżmy, że udowodniliśmy, iż: $\lambda_i=0$ dla i>s, gdzie $s\le k$. Zapiszemy s-tą współrzędną wektora $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{b_i}=\overline{0}$: 0=$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i b_{is}$ =$\sum_{i=1}^{s-1}\lambda_i b_{is}$ +$\lambda_s b_{ss}$+ $\sum_{i=s+1}^{k}\lambda_i b_{is}$. Pierwsza suma w prawej części otrzymanej relacji równa się zero, ponieważ $b_{is}=0$ dla i<s; ostatnia suma także wynosi zero, ponieważ $\lambda_i=0$ dla i>s. Dlatego $\lambda_s b_{ss}$=0, i ponieważ $b_{ss}\neq 0$, to $\lambda_s=0$. W ten sposób, założenie indukcji jest prawidłowe i $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k=0$. Z pokazanych rozważań wynika, że kolumnowy rząd macierzy B, a więc i macierzy A, jest równy k.

Twierdzenie zostało udowodnione.

TWIERDZENIE 5.3

Dowolną macierz A przy pomocy pomnożenia z lewej przez elementarne macierze $F_{ij}(\lambda)$ wymaganego wymiaru można przekształcić w postać stopniowaną.

Dowód twierdzenia, w istocie, wykonano w rozdziale 1, w algorytmie rugowania zmiennych.

Wniosek 5.1

Wierszowe i kolumnowe rzędy dowolnej macierzy są równe.

Potwierdzenie wniosku wynika z 5.1, 5.2 i 5.3.

OKREŚLENIE 5.3

Rzędem macierzy A nazywa się jej rząd wierszowy (kolumnowy).

TWIERDZENIE 5.4

Jeśli *A* – klatkowa macierz kwadratowa, to istnieją takie macierze elementarne $V_1, V_2, \ldots, V_k$, że iloczyn $A\,V_1V_2\ldots V_k$ jest macierzą diagonalną.

Dowód:

Algorytm przekształceń elementarnych, wymaganych przy diagonalizacji macierzy został przedstawiony w rozdziale 1.

TWIERDZENIE 5.5

Rząd iloczynu macierzy jest nie większy od rzędu poszczególnych czynników.

Dowód:

Wystarczy udowodnić twierdzenie dla dwóch czynników. Niech *C*=*AB*, gdzie *A*=(a_{ij}) – macierz o wymiarze k x m, *B*=(b_{ij}) – macierz o wymiarze m x n, i *C*=(c_{ij}) – macierz o wymiarze k x n. Zgodnie z określeniem iloczynu macierzy, $c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}$. Jeśli ustalić indeks i-ty, ale zmieniać indeks j-ty, to skalary c_{ij} będą współrzędnymi wektora-wiersza macierzy *C* o numerze i. Stąd wynika, że i-ty wiersz $\overline{c}_i$ macierzy *C* jest kombinacją liniową wierszy macierzy *B*, $\overline{c}_i = \sum_{s=1}^{m} a_{is}\overline{b}_s$ i=1, 2, ..., k. Zgodnie z 3.2, rząd macierzy *C* nie przewyższa rzędu macierzy *B*. Można również udowodnić, że kolumny macierzy *C* wyrażają się liniowo poprzez kolumny macierzy *A*, to znaczy, że rząd macierzy *C* nie przewyższa rzędu macierzy *A*.

Twierdzenie zostało udowodnione.

OKREŚLENIE 5.5.

Macierz kwadratowa stopnia n nazywa się nieosobliwą, jeśli jej rząd jest równy n.

TWIERDZENIE 5.6.

Jeśli *A* jest nieosobliwą macierzą kwadratową, to istnieją takie macierze elementarne $U_1U_2\ldots U_r$, że $U_1U_2\ldots U_r$ *A* będzie diagonalna.

Dowód:

Algorytmy przekształcenia macierzy do stopniowanej oraz diagonalizacji macierzy, zostały pokazane w rozdziale1.

OKREŚLENIE 5.6

Dowolna macierz diagonalna *D*, która została otrzymana z macierzy *A* przez pomnożenie macierzy elementarnej, nazywa się postacią diagonalną macierzy *A.*

LEMAT 5.1

Jeśli macierz A=$U_1U_2\ldots U_k$, gdzie U_i – macierz elementarna, to *A* posiada macierz odwrotną, przy czym $A^{-1}=W_1W_2\ldots W_k$, oraz $W_i = U_{k-i+1}^{-1}$ – macierz elementarna.

Dowód:

Poprzez bezpośrednie sprawdzenie można się przekonać, że $A\,W_1W_2\ldots W_k = E$, to znaczy macierz $W_1W_2\ldots W_k$ jest odwrotna do macierzy A. Zgodnie z własnością 3.2, macierz W_i jest elementarną i=1, 2, ..., k.

Lemat został dowiedziony.

TWIERDZENIE 5.7

Macierz kwadratowa A stopnia n posiada macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest nieosobliwa.

Dowód:

Warunek konieczny

Niech macierz A posiada macierz odwrotną. Wtedy istnieje taka macierz X, że $AX=XA=E$. Oczywiście rząd macierzy jednostkowej E wynosi n, rząd macierzy A nie przewyższa n (w układzie wektorów–wierszy macierzy A jest dokładnie n elementów). Z drugiej strony rząd macierzy E, zgodnie z twierdzeniem 5.5, nie przewyższa rzędu macierzy A. Dlatego rząd macierzy A jest równy n oraz A jest nieosobliwa.

Warunek wystarczający

Niech A – macierz nieosobliwa. Zgodnie z twierdzeniem 5.2, $V_1V_2\dots V_k$ A=D, gdzie D – macierz diagonalna, w której wszystkie n elementów przekątnej głównej jest różne od zera (rząd macierzy A jest równy n). W tym przypadku macierz D posiada macierz odwrotną. Niech D^{-1} – macierz, odwrotna do macierzy D. Wtedy $D^{-1}V_1V_2\dots V_k A=E$. Zatem macierz A posiada macierz odwrotną A^{-1}=D$V_1^{-1}V_2\dots V_n$. Twierdzenie zostało udowodnione.

5.2 Wyznacznik macierzy

OKREŚLENIE 5.7

Permutacją (podstawieniem) liczb naturalnych 1, 2, ...,n nazywa się tabelę postaci:

$\begin{pmatrix} 1\ 2 \dots\ n \\ i_1\, i_2 \dots i_n \end{pmatrix}$ gdzie $i_k \in 1,\dots,n$ i $j_j \neq i_k$ dla $j \neq k$. (5.2)

Liczbę n nazywa się stopniem permutacji (podstawienia).

W ten sposób, pierwszy wiersz permutacji zawiera wszystkie liczby naturalne od 1 do n, w porządku rosnącym, a drugi wiersz – te same liczby, ale w innym porządku.

Każda permutacja określa odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne 1...n w sobie.

Obok terminu «podstawienie» będziemy używać terminu «przestawienie» (oba terminy oznaczają permutację *przyp. tłum*). Tym samym podkreślamy, że drugi wiersz podstawienia (lub przestawienia) można otrzymać poprzez przestawienie miejscami elementów pierwszego wiersza. O ile w permutacji stopnia n pierwszy wiersz zawsze jest taki sam, to można zamiast zapisu (5.2) zastosować tylko zapis drugiego wiersza - $(i_1\, i_2 \dots i_n)$.

OKREŚLENIE 5.7

Permutację typu $\begin{pmatrix} 1\ 2 \dots i \dots j \dots\ n \\ 1\ 2 \dots j \dots i \dots\ n \end{pmatrix}$ nazywa się transpozycją (przestawieniem) elementów (i innych).

Transpozycja oznacza zamianę miejscami dwóch elementów. Oczywiście, można dokonać dowolnego przestawienia, dokonując kolejno kilku transpozycji. Nie będziemy tego udowadniać.

OKREŚLENIE 5.8

Permutacja $(i_1\ i_2\ \dots\ i_n)$ nazywa się parzystą, jeśli można jej dokonać przy pomocy parzystej liczby transpozycji.

Permutacja $(i_1\, i_2 \dots i_n)$ nazywa się nieparzystą, jeśli można jej dokonać przy pomocy nieparzystej liczby transpozycji.

UWAGA

Ogólnie rzecz ujmując, permutacji można dokonać, dokonując transpozycji różnymi sposobami. Dlatego należy udowodnić, że określenie 5.8 jest poprawne. Liczba transpozycji, przy pomocy których można otrzymać daną permutację, jeśli nie udowodni się czegoś przeciwnego, może różnić się parami. Jednak w teorii permutacji dowodzi się, że określenie parzystości permutacji jest poprawne.

Wprowadzimy teraz następujące oznaczenia:

Dla dowolnej permutacji $(i_1\, i_2 \ldots i_n)$ oznaczymy

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 1, \ gdy \ \ permutacja \ \ (i_1\, i_2 \ldots i_n) \ parzysta \ ; \\ -1, \ gdy \ \ permutacja \ \ (i_1\, i_2 \ldots i_n) \ nieparzysta. \end{cases} \quad (5.3)$$

Zbiór wszystkich permutacji stopnia n oznaczymy przez S_n. Nietrudno udowodnić metodą dedukcji matematycznej, że liczba elementów zbioru S_n równa się n! : $|S_n| = n!$.

Niech teraz $A = (\alpha_{ij})$ – macierz o wymiarze n×n.

OKREŚLENIE 5.8

Wyznacznikiem macierzy A nazywa się skalar

$$|A| = \sum_{(i_1 i_2 \ldots i_n) \in S_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot \alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \ldots \alpha_{ni_n} \quad (5.4)$$

Podkreślmy, że wartość wyznacznika jest poprawna tylko dla macierzy kwadratowych.
Zwróćmy uwagę na lewą część wzoru (5.4). Wyznacznik macierzy *A* oznacza się przy pomocy prostego nawiasu: | *A*|. Używa się także symbolu: *det(A)*.
Wzór wyznacznika jest sumą, która zawiera *n!* składników. Każdy składnik jest iloczynem *n* elementów macierzy *A*, przy czym każdy z elementów pochodzi z własnego wiersza i z własnej kolumny. W składniku $\alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\ldots\alpha_{ni_n}$ element α_{1i_1} należy do pierwszego wiersza, element α_{2i_2} należy do drugiego wiersza, przy czym jego kolumna nie jest kolumną pierwszego elementu, element α_{3i_3} należy do trzeciego wiersza, przy czym jego kolumna nie jest kolumną ani pierwszego, ani drugiego elementu, itd. Na koniec, każdy składnik znajduje się w sumie (5.4) ze znakiem plus lub minus. Jeśli permutacja $(i_1\, i_2 \ldots i_n)$ jest parzysta, to składnik $\alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\ldots\alpha_{ni_n}$ znajdzie się w sumie ze znakiem plus, jeśli nieparzysta – ze znakiem minus.
Rozpatrzymy jako przykład wzór wyznacznika 3×3 macierzy *A*:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33} +$$

$$+ \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31} - \alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31} + \alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32}$$

Aby określić znaki składników, rozpatrzymy 3! = 6 permutacji indeksów (1, 2, 3):

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Permutacje (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) są parzyste. Odpowiadające im składniki posiadają znak plus. Permutacje (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) są nieparzyste. Odpowiadające im składniki posiadają znak minus. Zatem:

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} -$$
$$- \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}$$

Ponieważ obliczanie parzystości danej permutacji jest niewygodne, zastosujemy wygodniejsze oznaczenie wyznacznika.

OKREŚLENIE 5.9

Minorem rzędu k macierzy *A* nazywa się wyznacznik macierzy *B* o wymiarze k×k, który składa się z wyodrębnionych k wierszy i kolumn macierzy *A*, rozmieszczonych w takim samym porządku jak i w macierzy *A*.

Rozpatrzymy teraz minory rzędu n-1, które otrzymuje się z macierzy *A* poprzez wykluczenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny *A*, dla wszystkich j od 1 do n. Oznaczymy je przez $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$. Minory te będziemy nazywać minorami pierwszego wiersza.

TWIERDZENIE 5.8

$$\det(A)=\alpha_{11}A_{11}-\alpha_{12}A_{12}+...+(-1)^{1+j}\alpha_{1j}A_{1j}+...+(-1)^{1+n}\alpha_{1n}A_{1n} \quad (5.5)$$

Dowód:

W sumie (5.4) dla każdego elementu 1-go wiersza α_{1j} zgrupujemy wszystkie składniki, które zawiera mnożnik α_{1j}. Otrzymamy:

$Det(A)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}B_j$. Nietrudno zobaczyć, że sumy B_j z dokładnością do znaku są minorami $A_{11}, A_{12}, ..., A_{1n}$.

Aby uściślić znaki składników w sumie (5.5), rozpatrzymy zbiór wszystkich podstawień S_n. Niech S_n^j – podzbiory S_n, które zawierają wszystkie podstawienia postaci $(j, i_2\, i_3 ... i_n)$ dla $j=1,...,n$.

$$S_n = S_n^1 \cup S_n^2 \cup ... \cup S_n^n .$$

Zauważmy, że podstawienia z S_n^j odpowiadają składnikowi $\alpha_{1j}A_{1j}$. Z drugiej strony, znak składnika w minorze A_{1j} jest określony parzystością podstawienia $(i_2\, i_3 ... i_n)$. To podstawienie zostało otrzymane z $(j, i_2\, i_3 ... i_n)$ poprzez rugowanie indeksu j. Wstawimy do podstawienia $(i_2\, i_3 ... i_n)$ indeks j na j-te miejsce. Ponieważ j znajduje się teraz na „swoim" miejscu, parzystość podstawienia $(i_2\, i_3 ... j ... i_n)$ pokrywa się z parzystością $(i_2\, i_3 ... i_n)$. W ten sposób przestawiliśmy indeks j z 1-go na j-te miejsce. Ponieważ można to zrobić przy pomocy j-1 transpozycji, składniki $\alpha_{1j}A_{1j}$ wchodzą w skład sumy (5.5) z plusem, jeśli j –1 jest parzyste lub z minusem, jeśli j-1 jest nieparzyste. Twierdzenie zostało udowodnione.

5.3 Wyznaczniki i przekształcenia elementarne.

Sformułujemy teraz kilka własności wyznaczników, które są bezpośrednimi następstwami określenia. (5.8).

Własność 5.1

$$\det(A)=\det(A^t)$$

Dowód:

Nietrudno zauważyć, że wzór wyznacznika (5.4) nie zmieni się, jeśli transponuje się macierz *A.*

Uwagi

Z własności 5.1 wynika, że w teorii wyznaczników wiersze i kolumny macierzy biorą udział w równym stopniu. Jeśli w pewnym rzeczywistym stwierdzeniu o wyznaczniku macierzy zamieni się słowo „wiersz" na „kolumna", to stwierdzenie to pozostanie prawdziwe.

Własność 5.2

Jeśli macierz A zawiera wiersz (kolumnę) zerowy, to $\det(A)=0$

Dowód:

W tym przypadku każdy ze składników sumy (5.4) będzie miał 0 w jednym z czynników.

Własność 5.3

Jeśli jeden z wierszy (kolumn) macierzy pomnoży się przez skalar α, to wyznacznik tej macierzy zostanie pomnożony przez ten skalar.

Dowód jest oczywisty.

Własność 5.4

Jeśli w macierzy są równe wiersze (kolumny), to wyznacznik tej macierzy równa się zero.

Dowód:

Załóżmy, że w macierzy A są równe j-ty i k-ty wiersze. Rozpatrujemy składniki w określeniu 5.8:
$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots j \ldots k \ldots i_n} \alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ji_j} \ldots \alpha_{ki_k} \ldots \alpha_{ni_n}$ i $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots k \ldots j \ldots i_n} \alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ki_k} \ldots \alpha_{ji_j} \ldots \alpha_{ni_n}$

Ponieważ zgodnie z założeniem $\alpha_{ji_j} = \alpha_{ki_k}$, iloczyny elementów macierzy w tych składnikach są równe: $\alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ji_j} \ldots \alpha_{ki_k} \ldots \alpha_{ni_n}$ = $\alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ki_k} \ldots \alpha_{ji_j} \ldots \alpha_{ni_n}$. Następnie, przestawienie indeksów jednego ze składników można otrzymać z przestawienia indeksów drugiego $\begin{pmatrix} 1 \ldots i \ldots j \ldots n \\ 1 \ldots j \ldots i \ldots n \end{pmatrix}$. To znaczy, że $\varepsilon_{i_1 \ldots j \ldots k \ldots i_n}$ = - $\varepsilon_{i_1 \ldots k \ldots j \ldots i_n}$. Zatem, rozpatrywane składniki mnożą się. Na skutek dowolności rozpatrywanej pary, cała suma (5.4) równa się zero.

Własność 5.5

Jeśli w macierzy zamieni się miejscami dwa wiersze (kolumny), to wyznacznik macierzy zmieni swój znak na przeciwny.

Dowód jest analogiczny do poprzedniego.

Własność 5.6

Stosując własność 5.5, można uogólnić wzór (5.5), rozkładając wyznacznik według minorów i-go wiersza:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} A_{ij} \tag{5.6}$$

Dowód jest bezpośrednim następstwem twierdzenia 5.8 oraz własności 5.5..

Własność 5.7

Jeśli na wierszach (kolumnach) macierzy dokona się przekształcenia elementarnego $F_{ij}(\lambda)$, to wyznacznik macierzy nie zmieni się.

Dowód:

Zastosujemy wzór 5.6 do i-ego wiersza przekształcanej macierzy A'

$$\det(A') = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} (\alpha_{ik} + \lambda \alpha_{jk}) A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \alpha_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \lambda \alpha_{jk} A_{ik}$$

$$\det(A') = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} (\alpha_{ik} + \lambda \alpha_{jk}) A_{ik} = \det(A) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \lambda \alpha_{jk} A_{ik};$$

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \lambda \alpha_{jk} A_{ik} = \lambda \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \alpha_{jk} A_{ik} = \lambda \cdot 0 = 0$, ponieważ suma ta jest wyznacznikiem macierzy z jednakowymi wierszami i-tym oraz j-tym. Dlatego $\det(A') = \det(A)$.

OKREŚLENIE 5.10

Wyznacznikiem algebraicznym A'_{ij} elementu α_{ij} macierzy kwadratowej A nazywa się wyrażenie $(-1)^{i+j} A_{ij}$.

Przy pomocy dopełnień algebraicznych można przekształcić wzór (5.6):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A'_{ij} \tag{5.7}$$

Własność 5.8

Wyznacznik macierzy diagonalnej równa się iloczynowi jej elementów diagonalnych.

Dowód jest oczywisty.

Własność 5.9

Suma iloczynów elementów dowolnego wiersza (kolumny) macierzy *A* i dopełnień algebraicznych elementów drugiego wiersza (kolumny) równa się zero.

Dowód:

Rozpatrzymy sumę $\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} A_{ir}$. Niech *B* – macierz, która została otrzymana z macierzy *A* poprzez zmianę wiersza o numerze j na wiersz o numerze i; inne wiersze macierzy *A* i *B* są takie same. Wyznacznik macierzy *B* równa się zero, bowiem wiersze i-ty i j-ty tej macierzy pokrywają się. Z drugiej strony, dopełnienia algebraiczne dla odpowiednich elementów j-go wiersza macierzy *A* i *B* również są zgodne. Zgodnie z określeniem 5.10 mamy

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} A_{jr} = 0. \qquad (5.8)$$

Algorytm obliczania wyznacznika macierzy

Własności 5.2 - 5.7 określają algorytm obliczenia wyznacznika macierzy kwadratowej. Jest to algorytm diagonalizacji macierzy. Zauważmy, że potrzebuje on znacznie mniejszych obliczeń, niż algorytm obliczania „zgodnie z określeniem”, to znaczy: ze wzoru (5.4) lub (5.5).

TWIERDZENIE 5.9

Macierz kwadratowa jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest różny od zera.

Warunek konieczny.

Jeśli *A* – macierz kwadratowa stopnia n jest nieosobliwa, to zgodnie z określeniem jej rząd (stopień) równa się n, a to znaczy, że wszystkie elementy diagonalne w jej postaci diagonalnej są różne od zera, ponieważ postać diagonalna jest macierzą stopniową. Wobec tego wyznacznik macierzy *A*, również jest różny od zera.

Warunek wystarczający.

Jeśli wyznacznik macierzy kwadratowej *A* nie równa się zero, to jej postać diagonalna jest macierzą stopniową. Ponieważ wyznacznik macierzy *A* nie jest równy zeru, to w jej postaci diagonalnej nie ma wierszy zerowych. Zatem jej rząd równa się n i zgodnie z określeniem macierz *A* jest nieosobliwa.

Twierdzenie zostało udowodnione.

TWIERDZENIE 5.10

Wyznacznik iloczynu macierzy równa się iloczynowi wyznaczników tych macierzy:

$$\det(AB) = \det(A) * \det(B)$$

Dowód.

Wystarczy tę własność udowodnić dla dwóch czynników *A* i *B*. Jeśli jedna z macierzy jest osobliwa, na przykład *A*, to zgodnie z twierdzeniem 4.5 osobliwa będzie także macierz *AB*. Dlatego |*AB*|=0, |*A*||*B*|=0. W tym przypadku dana własność jest prawdziwa.

Niech *A* i *B* macierze nieosobliwe. Sprowadzimy macierz *A* poprzez przekształcenia elementarne do postaci diagonalnej *d*. Kolejność przekształceń elementarnych określa taką macierz *L*, że *L*□*A* = *d*. Rozpatrzymy macierz *L*□*A*□*B*. Ponieważ przekształcenia elementarne nie zmieniają wyznacznika macierzy,

|*A*□*B*| = | *L*□*(A*□*B)*| = | *(L*□*A)*□*B)*|.

Ponieważ macierz *L*□*A* jest diagonalna, wystarczy udowodnić twierdzenie dla przypadku, gdy macierz *A* jest diagonalna.

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1b_{11} & d_1b_{12} & \dots & d_1b_{1n} \\ d_2b_{21} & d_2b_{22} & \dots & d_2b_{2n} \\ . & . & . & . \\ d_nb_{n1} & d_nb_{n2} & \dots & d_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

Zgodnie z własnością 5.3 przy obliczaniu wyznacznika otrzymanej macierzy skalary $d_1,\dots,d_n$ można wynieść poza wyznacznik jako czynniki:

$$\det(A \cdot B) = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Twierdzenie zostało udowodnione.

Uwagi

Wzór $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$ jest tożsamością algebraiczną. Zatem można go udowodnić porównując jego prawą i lewą części oraz rozpatrując je jako wielomiany ze współczynnikami α_{ij}, β_{ij} jako zmiennymi (współczynnikami nieokreślonymi).

TWIERDZENIE 5.11

Jeśli macierz *A* posiada macierz odwrotną, to wyznacznik macierzy A^{-1} równa się $|A|^{-1}$.

Dowód:

Ponieważ A^{-1}*A=E* i wyznacznik macierzy jednostkowej równa się 1, to $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, stąd $\cdot \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Twierdzenie zostało udowodnione.

TWIERDZENIE 5.12.

Rząd macierzy równa się największemu z rzędów jej minorów, które nie są równe zero.

Dowód:

Niech k rząd macierzy *A* o wymiarze m x n; $1 \le k \le m$, $1 \le k \le n$. Udowodnimy, że dowolny minor macierzy *A* rzędu większego od k równa się zero. Niech s>k i *B* – macierz o wymiarze s×s, która składa się z niektórych s wierszy oraz s kolumn macierzy *A.* Ponieważ s>k są wierszami macierzy *A*, z których składa się macierz *B*, to są liniowo zależne. Wtedy oczywiście, wiersze samej macierzy *B* także są liniowo zależne, a jej wyznacznik równa się zero. Zatem, minor rzędu s>k równa się zero. Udowodnimy teraz, że w macierzy *A* istnieje minor rzędu k, który nie równa się zero. Ponieważ rząd macierzy *A* równa się k, to istnieje k wierszy liniowo niezależnych macierzy *A.* Zestawimy z nich macierz A_1; wymiar macierzy *A* równa się k×n. Oczywiście, rząd macierzy A_1 także równa się k. Dlatego w macierzy A_1 znajduje się k liniowo niezależnych kolumn. Zestawimy z tych kolumn macierz *B* o wymiarze k×k. Rząd macierzy *B* także wynosi k i zgodnie z twierdzeniem 4.7, jej wyznacznik, który także jest minorem macierzy *A* k-go rzędu, nie równa się zero.

Twierdzenie zostało udowodnione.

TWIERDZENIE 5.13.

Jeśli A=(a_{ij}) – nieosobliwa macierz kwadratowa, A_{ij} – dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}, to macierz A^{-1} ma postać:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5.9)$$

Dowód:

Jeśli A^{-1}=(u_{ij}), AA^{-1} =(t_{ij}), to zgodnie z zasadą mnożenia macierzy $t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_{kj}$ = $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{A_{jk}}{|A|}$; zgodnie z (5.7), (5.8), t_{ij} =1, gdy i=j oraz t_{ij} =0, gdy $i \neq j$. Przecież *A*A^{-1} =E.

Twierdzenie zostało udowodnione.

Algorytm obliczania macierzy odwrotnej

Twierdzenie 5.13 określa macierz odwrotną w postaci jawnej, to znaczy określoną wzorem. Tym niemniej zastosowanie tego wzoru, jako algorytmu obliczania macierzy odwrotnej nie jest racjonalne, bowiem wymaga znaczących obliczeń. Jak, praktycznie, wszystkie algorytmy tej książki, tak algorytm odwracania jest w istocie, algorytmem diagonalizacji macierzy. Wymaga znacznie mniejszych obliczeń niż algorytm obliczania „zgodnie z określeniem”, to znaczy według wzoru (5.9). W rozdziale 11 podano przykład zastosowania tego algorytmu. Teraz ujmiemy go w postaci ogólnej.

W celu obliczenia macierzy odwrotnej do macierzy kwadratowej A,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

1. utworzymy rozszerzenie tej macierzy w postaci:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

   Macierz ta jest wyjściową dla algorytmu.

2. Poprzez przekształcenia elementarne będziemy przekształcać podstawową (lewą) połowę tej macierzy w macierz jednostkową.

3. Jeśli proces diagonalizacji odbędzie się do końca, to w miejsce macierzy wejściowej otrzymamy macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

   Wyjście:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ . & . & . & . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

W przeciwnym przypadku macierz *A* nie ma macierzy odwrotnej.

Rozdział 6. Operatory liniowe

Niech U – skończona n-wymiarowa przestrzeń nad pewnym ciałem F.

OKREŚLENIE 6.1

Operatorem liniowym, ustanowionym w przestrzeni U, nazywa się odwzorowanie φ przestrzeni U w sobie, które spełnia następujące warunki:

1.Dla dowolnych wektorów $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ $\in U$,

$$\varphi(\overline{a_1}+\overline{a_2}) = \varphi(\overline{a_1})+\varphi(\overline{a_2});$$

2.Dla dowolnego $\overline{a} \in U$ i dowolnego $\lambda \in F$,

$$\varphi(\lambda\,\overline{a})=\lambda\,\varphi(\overline{a}).$$

PRZYKŁADY

1) Niech U – dowolna przestrzeń wektorowa nad ciałem F i $\overline{a} \in F$. Niech $\varphi(\overline{u})=\alpha\,\overline{u}$ dla dowolnego $\overline{u} \in U$. φ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U.
2) Niech U – zbiór wielomianów stopnia nie wyższego niż n nad ciałem liczb rzeczywistych R. Niech $\varphi(f(x))=f^{'}(x)$, gdzie $f(x) \in U$. Z własności działań różniczkowania wynika, że φ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U.

Najprostsze właściwości operatorów liniowych

1. Jeśli φ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U, to $\varphi(\overline{0})=\overline{0}$.

Rzeczywiście, $\varphi(\overline{0})=\varphi(0\overline{a})=0\varphi(\overline{a})=\overline{0}$.

1) $\varphi(\sum_{i=1}^{k} a_i\overline{u_i})=\sum_{i=1}^{k} a_i\varphi(\overline{u_i})$.

Wynika bezpośrednio z określenia operatora liniowego. Własność 2 oznacza, że odwzorowanie operatora liniowego w przestrzeni U jest jednoznacznie określone jego odwzorowaniem w bazie przestrzeni. Co więcej, takie twierdzenie jest słuszne.

TWIERDZENIE *6.1*

Niech $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\dots,\overline{e_n}\}$ – baza przestrzeni wektorowej U nad ciałem F oraz $\{\overline{u_1},\overline{u_2},\dots,\overline{u_n}\}$ – dowolny układ wektorów tej przestrzeni. Wtedy istnieje jedyny operator liniowy φ przestrzeni U, dla którego ma miejsce równość: $\varphi(\overline{e_i})=\overline{u_i}$, i=1, 2, ..., n.

Dowód:

Niech $\overline{x} \in U$, $\overline{x}$ – dowolny wektor. Wtedy $\overline{x}=\sum_{i=1}^{k} a_i\overline{e_i}$, założymy, że $\varphi(\overline{x})=\sum_{i=1}^{k} a_i\overline{u_i}$. Bezpośrednio sprawdza się, że odwzorowanie φ przestrzeni wektorowej U w sobie odpowiada warunkom 1 i 2 określenia wektora liniowego, przy czym $\varphi(\overline{e_i})=\overline{u_i}$, i=1, 2, ..., n. Zatem, φ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U. Operator U o danych własnościach jest jedyny, co jest oczywiste.

OKREŚLENIE 6.2

Jądrem operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni U, nazywa się zbiór wszystkich wektorów z U, z których każdy poprzez operator φ odwzorowuje się w wektor zerowy.

TWIERDZENIE *6.2*

Jądro operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni U nad ciałem F, jest podprzestrzenią przestrzeni U.

Dowód:

Niech V – jądro operatora liniowego φ. Zgodnie z własnością 1, $\bar{0} \in V$, to znaczy V – zbiór niepusty. Jeśli $\bar{u}_1 \in V$, $\bar{u}_2 \in V$, $\alpha \in F$, to $\varphi(\bar{u}_1+\bar{u}_2)=\varphi(\bar{u}_1)+\varphi(\bar{u}_2)\bar{0}$; $\varphi(\alpha\ \bar{u}_1)=\alpha\ \varphi(\bar{u}_1)=\ \alpha\ \bar{0}=\bar{0}$. Zgodnie z twierdzeniem 3.2, V – podprzestrzeń przestrzeni U.

OKREŚLENIE 6.3.

Defektem operatora liniowego nazywa się wymiar jądra tego operatora.

OKREŚLENIE 6.4.

Obrazem operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni U nad ciałem F, nazywa się zbiór S wektorów $\bar{u} \in U$ takich, że $\bar{u}=\varphi(\bar{a})$, dla pewnego $\bar{a} \in U$.

Obraz operatora liniowego φ będziemy oznaczać przez $\operatorname{Im}\varphi=\{\varphi(\bar{u})|\ \bar{u} \in U\}$.

TWIERDZENIE *6.3.*

Obraz operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni U nad ciałem F jest podprzestrzenią przestrzeni U.

Dowód:

Zgodnie z własnością 6.1 $\bar{0} \in \operatorname{Im}\varphi$, dlatego $\operatorname{Im}\varphi$ – niepusty. Niech $\bar{u}_1 \in \operatorname{Im}\varphi$, $\bar{u}_2 \in \operatorname{Im}\varphi$, $\lambda \in F$. Zgodnie z określeniem obrazu operatora liniowego φ, w przestrzeni U istnieją takie wektory $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, że $\bar{u}_i=\varphi(\bar{v}_i)$, i=1,2. Wtedy $\bar{u}_1+\bar{u}_2=\varphi(\bar{v}_1+\bar{v}_2)\in \operatorname{Im}\varphi$, $\lambda\ \bar{u}_1=\lambda\ \varphi(\bar{v}_1)=\varphi(\overline{\lambda v_1}) \in \operatorname{Im}\varphi$. Zgodnie z twierdzeniem 3.2, $\operatorname{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią przestrzeni U.

OKREŚLENIE 6.5.

Wymiar obrazu operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni U, nazywa się rzędem operatora φ.

TWIERDZENIE *6.4.*

Suma rzędu i defektu operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni U nad ciałem F, równa się wymiarowi przestrzeni U.

Dowód:

Niech V – jądro operatora liniowego φ i $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_m\}$ - baza przestrzeni V; tutaj m – defekt operatora liniowego φ, $m \le n$, gdzie n – wymiar przestrzeni U. Zgodnie z wnioskiem 3.4, bazę podprzestrzeni U można dodać do bazy całej przestrzeni U; niech $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_m\ \bar{f}_1,\bar{f}_2,\ldots,\bar{f}_{n-m}\}$ – baza przestrzeni U. Niech $\bar{g}_i=\varphi(\overline{f}_i)$, i=1, 2, ..., n-m, i udowodnimy, że $\{\bar{g}_1,\bar{g}_2,\ldots,\bar{g}_{n-m}\}$ - baza podprzestrzeni $\operatorname{Im}\varphi$. Niech $\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i\bar{g}_i=\bar{0}$; wtedy $\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i\varphi(\bar{f}_i)=\bar{0}$, lub $\sum_{i=1}^{n-m}\varphi(\gamma_i\bar{f}_i)=\varphi(\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i\bar{f}_i)=\bar{0}$. Dlatego $\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i\bar{f}_i \in V$, a znaczy $\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i\bar{f}_i=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\bar{e}_j$, lub $\sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i\bar{f}_i+\sum_{j=1}^{m}(-\beta_j)\bar{e}_j=\bar{0}$.Tak jak $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_m\ \bar{f}_1,\bar{f}_2,\ldots,\bar{f}_{n-m}\}$ – baza przestrzeni U, to wszystkie współczynniki w otrzymanej kombinacji liniowej równają się zeru. Na przykład, $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_{n-m}=0$. Dlatego układ wektorów $\{\bar{g}_1,\bar{g}_2,\ldots,\bar{g}_{n-m}\}$ jest liniowo niezależny. Niech $\bar{u} \in \operatorname{Im}\varphi$. Wtedy $\bar{u}=\varphi(\bar{v})$, dla pewnego $\bar{v} \in U$; $\bar{v}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\bar{e}_j+\sum_{i=1}^{n-m}\alpha_i\bar{f}_i$. Dlatego $\bar{u}=\varphi(\bar{v})=\varphi(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\bar{e}_j+\sum_{i=1}^{n-m}\alpha_i\bar{f}_i)=\sum_{i=1}^{n-m}\alpha_i\bar{g}_i$, ponieważ $\varphi(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\bar{e}_j)$=0. Zatem, _ – maksymalnie liniowo niezależny układ wektorów $\operatorname{Im}\varphi$. Dlatego rząd r operatora φ wynosi n-m; r=n-m. Stąd r+m=n. Twierdzenie udowodnione.

OKREŚLENIE 6.6.

Niech φ_1, φ_2 - operatory liniowe, które istnieją w przestrzeni U nad ciałem F. Sumą $\varphi_1+\varphi_2$, różnicą $\varphi_1-\varphi_2$, iloczynem $\lambda\,\varphi_1$ przez skalar λ operatora φ_1 oraz iloczynem $\varphi_1\varphi_2$ operatorów φ_1 i φ_2 nazywa się odwzorowania przestrzeni U w sobie, określone zgodnie ze wzorami dla dowolnego $\bar{u}\in U$:

$(\varphi_1+\varphi_2)(\bar{u})=\varphi_1(\bar{u})+\varphi_2(\bar{u})$;

$(\varphi_1-\varphi_2)(\bar{u})=\varphi_1(\bar{u})-\varphi_2(\bar{u})$;

$(\lambda\,\varphi_1)(\bar{u})=\lambda\,\varphi_1(\bar{u})$;

$(\varphi_1\varphi_2)(\bar{u})=\varphi_1(\varphi_2(\bar{u}))$.

TWIERDZENIE *6.5.*

Wszystkie odwzorowania, dane w określeniu 6.6, są operatorami liniowymi, które istnieją w przestrzeni U nad ciałem F.

Dowód:

Udowodnimy twierdzenie, na przykład: dla odwzorowania $\varphi_1\varphi_2$.

1) Niech $\lambda\in F$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2\in U$.

Wtedy $(\varphi_1\varphi_2)(\bar{u}_1+\bar{u}_2)=\varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1+\bar{u}_2))=\varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1)+\varphi_2(\bar{u}_2))=$
$=\varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1))+\varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_2))=(\varphi_1\varphi_2)(\bar{u}_1)+(\varphi_1\varphi_2)(\bar{u}_2)$.

2) $\varphi_1\varphi_2(\lambda\,\bar{u}_1)=\varphi_1(\varphi_2(\lambda\,\bar{u}_1))=\varphi_1(\lambda\,\varphi_2(\bar{u}_1))=\lambda\,\varphi_1(\varphi_2(\bar{u}_1))=\lambda\,(\varphi_1\varphi_2)(\bar{u}_1)$.

Dlatego $\varphi_1\varphi_2$ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U nad ciałem F.

OKREŚLENIE 6.7.

Niech $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$ – baza przestrzeni liniowej U, φ - operator liniowy, który istnieje w tej przestrzeni i $\varphi(\bar{e}_j)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\bar{e}_i$, j=1, 2, …, n.

Macierz $A=(a_{ij})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ nazywa się macierzą operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni U, w bazie $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$. Z określenia macierzy operatora liniowego φ w bazie $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$ wynika, że kolumny tej macierzy są współczynnikami rozkładu wektorów $\varphi(\bar{e}_1),\varphi(\bar{e}_2),\ldots,\varphi(\bar{e}_n)$ zgodnie z bazą $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$.

TWIERDZENIE *6.6.*

Jeśli A_i – macierz operatora liniowego φ, i=1, 2, który istnieje w przestrzeni U, w bazie $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$, to macierzami operatorów liniowych $\varphi_1+\varphi_2$, $\varphi_1-\varphi_2$, $\lambda\,\varphi_1$, $\varphi_1\varphi_2$ będą odpowiednio A_1+A_2, A_1-A_2, $\lambda\,A_1$, A_1A_2.

Dowód:

Jeśli $A_1=(\lambda_{ij})$ – macierz operatora liniowego φ, w bazie $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$, to $\varphi(\bar{e}_j)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\bar{e}_i$. Symbolami będziemy to zapisywać następująco: $(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \ldots, \varphi(\bar{e}_n))=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)A_1$.

Analogicznie, $(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \ldots, \varphi(\bar{e}_n))=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)A_2$. Dlatego $((\varphi_1+\varphi_2)(\bar{e}_1), (\varphi_1+\varphi_2)(\bar{e}_2),$ $\ldots, (\varphi_1+\varphi_2)(\bar{e}_n))=$

$=(\varphi_1(\bar{e}_1)+\varphi_2(\bar{e}_1), \varphi_1(\bar{e}_2)+\varphi_2(\bar{e}_2), \ldots, \varphi_1(\bar{e}_n)+\varphi_2(\bar{e}_n)) =$

$(\varphi_1(\bar{e}_1), \varphi_1(\bar{e}_2), \ldots, \varphi_1(\bar{e}_n))+ +(\varphi_2(\bar{e}_1), \varphi_2(\bar{e}_2), \ldots, \varphi_2(\bar{e}_n))=$

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)A_1+(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)A_2=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)(A_1+A_2)$.

Tutaj wykorzystane są własności działań na macierzach, które są zachowane także w przypadku, gdy elementami macierzy-wiersza są wektory przestrzeni *U*. W rezultacie z otrzymanej równości wynika, że A_1+A_2 będzie macierzą operatora liniowego $\varphi_1+\varphi_2$. Analogicznie dowodzi się twierdzenia dla operatorów φ_1-φ_2 i $\lambda\,\varphi_1$. Rozpatrzmy teraz operatora $\varphi_1\varphi_2$. Jeśli $A_1=(\lambda_{ij})$, $A_2=(\mu_{ij})$, to

$$(\varphi_1\varphi_2)(\bar{e}_k)=\varphi_1(\varphi_2(\bar{e}_k))=\varphi_1(\sum_{j=1}^{n}\mu_{ik}\bar{e}_i)=\sum_{j=1}^{n}\mu_{ik}\varphi_1(\bar{e}_i)=\sum_{j=1}^{n}\mu_{ik}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}\bar{e}_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ik}\lambda_{ji}\bar{e}_i=$$

$=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}\mu_{ik}\lambda_{ji})\bar{e}_i$. Jeśli $B=(\beta_{ij})$ – macierz operatora liniowego $\varphi_1\varphi_2$, to z otrzymanej równości wynika, że $\beta_{jk}=\sum_{j=1}^{n}\mu_{ik}\lambda_{ji}$, to znaczy $B=A_1A_2$. Wynika to z określenia iloczynu macierzy.

Twierdzenie zostało udowodnione.

Rozwiążemy teraz następujące zadanie:

Niech $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ – baza przestrzeni *U*, w której istnieje operator liniowy φ. Znane są współrzędne wektora $\bar{u}$ w tej bazie. Należy znaleźć współrzędne wektora $\varphi(\bar{u})$ w danej bazie. Jeśli $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)$ – współrzędne wektora $\bar{u}$ w danej bazie, to $\bar{u}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{e}_1$. Symbolami można to zapisać tak:

$$\bar{u}=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_k\end{bmatrix}$$

Z własności 6.2 operatorów liniowych wynika, że:

$$\varphi(\bar{u})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(\bar{e}_i)=(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \ldots, \varphi(\bar{e}_n))\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_k\end{bmatrix}$$

Niech *A* – macierz operatora φ w tejże bazie $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$. Wtedy:

$$\varphi(\bar{u})=(\varphi(\bar{e}_1),\varphi(\bar{e}_2),\ \ldots,\ \varphi(\bar{e}_n))\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \ldots\\ \lambda_k\end{bmatrix}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n)\mathrm{A}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \ldots\\ \lambda_k\end{bmatrix}$$

Stąd wynika, że współrzędna kolumna wektora $\varphi(\bar{u})$ w bazie $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$ jest iloczynem macierzy operatora φ i kolumny współrzędnych wektora $\bar{u}$ w tej bazie.

TWIERDZENIE *6.7.*

Rząd operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni U, równa się rzędowi macierzy tego operatora w dowolnej bazie przestrzeni U.

Dowód:

Niech $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$ - pewna baza przestrzeni U, A – macierz operatora φ w tej bazie. Oczywiście $\{\varphi(\bar{e}_1),\varphi(\bar{e}_2),\ \ldots,\ \varphi(\bar{e}_n)\}$ – układ tworzących przestrzeni $\operatorname{Im}\varphi$. Dlatego poziom operatora φ jest równy poziomowi układu wektorów $\{\varphi(\bar{e}_1),\varphi(\bar{e}_2),\ \ldots,\ \varphi(\bar{e}_n)\}$. Niech $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(\bar{e}_i)=\bar{0}$; wtedy:

$$(\varphi(\bar{e}_1),\varphi(\bar{e}_2),\ \ldots,\ \varphi(\bar{e}_n))\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \ldots\\ \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{bmatrix},$$

lub $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n)\,A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \ldots\\ \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{bmatrix}$.

Ponieważ $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$ – baza przestrzeni U, to

$$A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \ldots\\ \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{bmatrix}$$

Jeśli $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n\}$ – układ wektorów-kolumn macierzy A, to z otrzymanej równości wynika, że $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{a}_i=\bar{0}$. Oczywiście, że z drugiej współzależności wynika pierwsza. Zgodnie z lematem 3.4 rzędy układów $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n\}$ i $\{\varphi(\bar{e}_1),\varphi(\bar{e}_2),\ \ldots,\ \varphi(\bar{e}_n)\}$ są równe.

Twierdzenie zostało udowodnione.

TWIERDZENIE *6.8.*

Niech U – przestrzeń wektorowa nad ciałem F, φ - operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U. Następujące twierdzenia są równoważne:

1. Odwzorowanie φ jest iniekcyjne;
2. Defekt operatora φ jest równy zeru;
3. Rząd operatora φ równa się wymiarowi przestrzeni U;
4. Odwzorowanie φ jest sjurjekcyjne.

Dowód:

Jeśli φ – odwzorowanie iniekcyjne, to jądro φ składa się z jednego wektora zerowego. Dlatego defekt operatora φ równa się zero. Zatem warunek 1 pociąga za sobą warunek 2. Jeśli spełniony jest warunek 2, to zgodnie z twierdzeniem 6.4 rząd operatora φ równa się wymiarowi przestrzeni U, to znaczy z 2 wynika 3. Jeśli spełniony jest warunek 3, to $\operatorname{Im}\varphi \subset U$, przy czym wymiary przestrzeni są równe. Dlatego $\operatorname{Im}\varphi = U$ oraz odwzorowanie φ - sjurjekcyjne, to rząd operatora φ równa się wymiarowi przestrzeni U, to znaczy: defekt φ równa się 0 i odwzorowanie φ jest iniekcyjne. Zatem, z warunku 4 wynika warunek 1. Twierdzenie zostało dowiedzione.

Na koniec, wyjaśnimy jeszcze jedno zagadnienie. Niech A – macierz operatora liniowego φ w bazie $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, B – macierz tego operatora w bazie $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$. W jaki sposób macierze A i B są ze sobą związane?

Niech $\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}\bar{e}_j$, i=1, 2, ..., n. Jeżeli $T=(\lambda_{ij})$, to $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)T$. Oprócz tego, $\varphi(\bar{f}_i)=\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}\varphi(\bar{e}_j)$, a więc, $(\varphi(\bar{f}_1), \varphi(\bar{f}_2), \dots, \varphi(\bar{f}_n))=(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n))T$. Ponieważ $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ – liniowo niezależny układ wektorów, to T – macierz nieosobliwa, a więc posiada macierz odwrotną. Dlatego $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)=(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)T^{-1}$. Zatem,

$(\varphi(\bar{f}_1), \varphi(\bar{f}_2), \dots, \varphi(\bar{f}_n))=(\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n))T = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)AT = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)T^{-1}AT = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)B$.

Stąd $(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0})=(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)(T^{-1}AT-B)$. Ponieważ $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ – baza przestrzeni U, to $T^{-1}AT=B$. Macierz T nazywa się macierzą przejścia od bazy $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ do bazy $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$. Macierz T^{-1} nazywa się macierzą przejścia od $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ do $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$.

WYPROWADZENIE:

Macierz operatora liniowego φ w bazie $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ równa się iloczynowi macierzy przejścia od bazy $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ do bazy $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ przez macierz operatora φ w bazie $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ i przez macierz przejścia od $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ do $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$.

OKREŚLENIE 6.8.

Niech U – przestrzeń wektorowa nad ciałem F, φ – operator liniowy, który istnieje w tej przestrzeni. Podprzestrzeń $W \subset U$ nazywa się φ-niezmienną, jeśli $\varphi(\bar{u}) \in W$, dla dowolnego $\bar{u} \in W$.

LEMAT 6.1.

Jeśli W – φ-inwariantna podprzestrzeń przestrzeni U i $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\ \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ – taka baza przestrzeni U, że $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – baza podprzestrzeni W, to macierz operatora liniowego φ w danej bazie przestrzeni U ma postać klatkową: $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, gdzie A – macierz ograniczenia operatora φ w W w bazie $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$.

Lemat jest oczywisty.

LEMAT 6.2.

Macierz A posiada postać klatkową: $\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$.

Rozdział 7. Układy równań liniowych

W tym rozdziale powrócimy do rozpatrzenia układów równań liniowych i metodach ich rozwiązywania w systemie pojęć przestrzeni wektorowych.

Układ równań liniowych (1.1) może być zapisany w postaci macierzowej:

$$A \cdot X = B \tag{7.1}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Przypomnijmy, że macierz *A* nazywa się macierzą podstawową układu, *X* nazywa się kolumną nieznanych, a *B* – kolumną wyrazów wolnych.

Rozszerzona macierz *U* ma postać

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Przy pomocy terminów teorii macierzy sformułujemy kryterium rozwiązania układów równań liniowych.

TWIERDZENIE *7.1 (Kroneckera-Capelli'ego).*

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby układ równań liniowych miał rozwiązanie jest to, by rząd macierzy podstawowej tego układu równał się rzędowi macierzy rozszerzonej o kolumnę wyrazów wolnych.

Dowód:

Warunek konieczny

Niech układ równań liniowych (1.1) jest rozwiązywalny. Jeżeli $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ jest jego rozwiązaniem, to $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\gamma_k = b_i$, i=1, 2, ..., m. W postaci macierzowej można to zapisać w postaci:

$$AG=B, \text{ gdzie } G=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix}$$

Otrzymana relacja oznacza, że kolumna wyrazów wolnych B wyraża się liniowo poprzez kolumny macierzy *A*. Ponieważ wszystkie kolumny macierzy *A* są kolumnami macierzy *U*, to układy wektorów-kolumn macierzy *A* i *U* są równoważne. Zatem rząd macierzy podstawowej *A* równa się rzędowi macierzy rozszerzonej *U*.

Warunek dostateczny

Załóżmy, że rzędy macierzy *A* i *U* są równe. To oznacza, że maksymalny liniowo niezależny układ wektorów-kolumn macierzy *A* jest taki sam, jak i dla macierzy *U*. Dlatego kolumna wyrazów wolnych *B* jest kombinacją liniową kolumn macierzy *A.* Zatem istnieją takie liczby $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, że

$$A\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = B$$

W ten sposób wektor $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in F^n$ jest rozwiązaniem układu równań liniowych (1.1). A zatem dany układ jest rozwiązywalny.

Twierdzenie zostało udowodnione.

Zanim przystąpimy do badania układu równań liniowych (1.1), rozpatrzymy najpierw szczególny przypadek, gdy m=n, i macierz *A* jest nieosobliwa. Z nieosobliwości macierzy *A* wynika, że jej rząd jest równy n, dlatego rząd macierzy rozszerzonej *U* także jest równy n, a dany układ jest rozwiązywalny zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Capelliego. Pomnożymy równość (7.1) z lewej przez macierz A^{-1}: A^{-1}(*AX*)= A^{-1}*B* lub (A^{-1}*A*)*X*= A^{-1}*B*; to znaczy *X*= A^{-1}*B*. Z tej równości wynika, że układ równań liniowych posiada jedno rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem 5.13:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1T} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2T} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{T1} & A_{T2} & \ldots & A_{TT} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} C_A,$$ gdzie $C_A = (A_{ij})$.

Dlatego X = $-\frac{1}{|A|}$ C_A B = $\frac{|B_i|}{|A|}$, i=1, 2, ..., n, gdzie B_i - macierz, otrzymana z *A* poprzez zamianę kolumny współczynników przy zmiennej i, na kolumnę wyrazów wolnych *B.* Zatem, jeśli w układzie (1.1) m=n i macierz podstawowa jest rozwiązalna, to układ równań liniowych posiada jedno rozwiązanie, które zapisuje się w postaci wzorów:

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|}, \qquad i=1.\ 2, \ldots, n \qquad (7.2).$$

Wzory (7.3) nazywa się *wzorami Cramera*.

Wzory te są niewygodne do praktycznego rozwiązywania układu równań liniowych, ale mają znaczenie teoretyczne. W praktyce, w celu poszukiwania rozwiązania układu równań liniowych używa się metody rugowania zmiennych, przedstawionej w rozdziale 1. Metodę tę nazywa się metodą Gaussa. Rozpatrzymy układ, otrzymany z (1.1) poprzez wykluczenie zmiennej x_1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad \ldots \\ \quad a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \qquad (7.3)$$

W postaci macierzowej wykluczenie zmiennej x_1 z 2-ej równości można realizować poprzez pomnożenie równości (7.1) z lewej przez macierz elementarną $F_{21}(-a_{11}^{-1}a_{21})$. Jeśli $a_{11} = 0$, to można przestawić równość, wziąwszy za pierwszą tę równość, w której współczynnik przy x_1 nie równa się zero.

Przy pomocy metody Gaussa rozwiązanie układu równań liniowych z n zmiennymi sprowadza się do rozwiązania tego układu z (n-1) zmiennymi.

Przejdziemy do ogólnego przypadku układu równań liniowych (1.1), to znaczy do przypadku, gdy m i n - wolne.

TWIERDZENIE *7.2.*

Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych z n zmiennymi jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej *F*.

Dowód:

Niech $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ – dwa rozwiązania układu jednorodnych równań liniowych z macierzą podstawową $A=(a_{ij})$, i=1, 2, ..., m, j=1, 2, ..., n. Zgodnie z określeniem rozwiązania równania mamy:

$$A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}, \text{ и } A\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \cdots\\ \mu_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

$$A\begin{bmatrix}\lambda_1+\mu_1\\ \lambda_2+\mu_2\\ \dots\\ \lambda_k+\mu_n\end{bmatrix}=A\left[\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \dots\\ \lambda_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \dots\\ \mu_k\end{bmatrix}\right]=A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_k\end{bmatrix}+A\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \cdots\\ \mu_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}$$

W ten sposób, suma dwóch rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych ponownie będzie rozwiązaniem tego układu. Analogicznie dowodzi się, że iloczyn wektora rozwiązania $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ przez skalar $\gamma \in F$ także będzie rozwiązaniem danego jednorodnego układu równań liniowych. Zgodnie z twierdzeniem 3.2 zbiór wszystkich rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych z n zmiennymi jest podprzestrzenią *F*.

Twierdzenie zostało udowodnione.

TWIERDZENIE *7.3.*

Wymiar przestrzeni rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych równa się n-r, gdzie n – liczba zmiennych, a r – rząd macierzy podstawowej układu.

Dowód:

Niech *A* – macierz podstawowa układu jednorodnych równań liniowych, r – jej rząd. Jeśli $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – rozwiązanie układu (1.1) to ma miejsce równanie:

$$A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_k\end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Niech $\{\bar{e}_1=(1,0,...,0)$, $\bar{e}_2=(0,1,...,0)$, ..., $\bar{e}_n=(0,0,...,1)\}$ – baza przestrzeni wektorowej F^m i φ – operator liniowy, który istnieje w tej przestrzeni, przy czym macierz operatora φ w danej bazie równa się *A*. Ze związku (7.4) wynika, że każde rozwiązanie układu równań liniowych (1.1) należy do jądra operatora φ. Zgodnie z twierdzeniem 6.7 rząd operatora liniowego φ równa się rzędowi macierzy *A,* to znaczy wynosi r. Z drugiej strony, zgodnie z twierdzeniem 6.4, defekt operatora φ równa się n-r. Potwierdzenie danego twierdzenia wynika z tego, że defekt operatora φ równa się wymiarowi przestrzeni rozwiązań układu (1.1).

OKREŚLENIE 7.1

Fundamentalnym układem rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych nazywa się bazę przestrzeni rozwiązań tego układu.

Z poprzedniego twierdzenia wynika, że fundamentalny układ rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych zawiera n-r rozwiązań, gdzie n – liczba zmiennych, a r – rząd podstawowej macierzy układu.

Zadanie fundamentalnego układu rozwiązań określa całą przestrzeń rozwiązań. Dlatego zadanie wyszukania zbioru wszystkich rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych sprowadza się do znalezienia fundamentalnego układu rozwiązań.

Krótko opiszemy proces znajdywania fundamentalnego układu rozwiązań układu jednorodnego AX=0, w którym rząd A równa się r.

1) Sprowadzamy macierz *A* do postaci stopniowanej przy pomocy przekształceń elementarnych, to znaczy poprzez pomnożenie jej z lewej przez macierz *U*, która posiada macierz odwrotną: *UAX=U0*; *(UA)X*=0.
2) Macierz *UA* zawiera r wierszy zerowych. Zatem układ *(UA)X*=0 faktycznie zawiera r nietrywialnych równości. Oprócz tego jest równosilny z danym układem *AX=0*.
3) Macierz *UA* zawiera minor r-go rzędu, różny od zera. Pozostawimy w lewych częściach równości układu *(UA)X*=0 tylko te zmienne, przy których współczynniki wchodzą w skład minoru r-go rzędu, który nie równa się zero. Inne (n-r) zmienne przeniesiemy do prawej części równości i nazwiemy te zmienne wolnymi.
4) W otrzymanym układzie będziemy nadawać (n-r) wolnym zmiennym dowolne wartości. Ponieważ macierz, która składa się ze współczynników przy r zmiennych w lewej części, jest kwadratowa i nieosobliwa, to dla dowolnych wartości wolnych zmiennych przekształcony układ posiada jedno rozwiązanie.
5) Fundamentalny układ rozwiązań tworzymy w następujący sposób: przypisując pierwszej ze zmiennych wolnych wartość 1, a innym – wartości zerowe, otrzymujemy pierwsze fundamentalne rozwiązanie; potem wartość 1 nadajemy drugiej wolnej zmiennej, a pozostałym – wartość zerową; to będzie drugie rozwiązanie fundamentalne, itd. Ponieważ wolnych zmiennych jest (n-r), to w opisany sposób otrzymamy (n-r) rozwiązań. Można łatwo ustanowić liniową zależność otrzymanego układu rozwiązań.

Niech teraz dany jest niejednorodny układ równań liniowych *AX=B* (). Układowi (7.1) przypiszemy odpowiednio jednorodny układ równań liniowych

$$AX=0 \qquad (7.5).$$

Przypomnimy teraz twierdzenia 1.9, 1.10

Z tych twierdzeń wynika, że dowolne rozwiązanie układu równań liniowych (1.1) może być otrzymane jako suma pewnego zaznaczonego rozwiązania tego układu i dowolnego rozwiązania odpowiedniego układu jednorodnego (7.5). W taki sposób, zbiór rozwiązań układu niejednorodnego (7.1) jest warstwą liniową.

Rozdział8. Wektory własne operatora liniowego

W rozdziale 6 „Operatory liniowe” został ustanowiony związek pomiędzy macierzami tego samego operatora liniowego, który istnieje w przestrzeni U nad ciałem F w różnych bazach. W związku z tym wynika problem znalezienia bazy przestrzeni wektorowej U, w której macierz operatora liniowego φ miałaby najprostszą postać. W rozwiązaniu postawionego zadania dużą rolę pełni pojęcie wektora własnego.

OKREŚLENIE 8.1.

Skalar $\lambda \in F$ nazywa się wartością własną operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni wektorowej U nad ciałem F, jeśli w przestrzeni U istnieje taki niezerowy wektor $\overline{u}$, który $\varphi(\overline{u})=\lambda \overline{u}$. W takim przypadku wektor $\overline{u}$ nazywa się wektorem własnym operatora liniowego φ, który należy do wartości własnej λ.

Zauważmy, że wektory własne operatora liniowego φ, to wektory niezerowe.

W celu znalezienia wektorów własnych operatora liniowego φ zadamy w przestrzeni U dowolną bazę $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Niech $\overline{u}=(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ – wektor własny operatora φ, który należy do wartości własnej λ; $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – współrzędne wektora $\overline{u}$ w danej bazie. Wtedy $\varphi(\overline{u})=\lambda \overline{u}$ $=(\lambda\gamma_1, \lambda\gamma_2, \dots, \lambda\gamma_n)$. Jeśli A – macierz operatora liniowego φ w danej bazie, to

$$\begin{bmatrix} \lambda\gamma_1 \\ \lambda\gamma_2 \\ \dots \\ \lambda\gamma_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix}, \text{ lub } \lambda E \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix},$$

$$(\lambda E-A)\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ wektor $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)=\overline{u} \neq \overline{0}$, to rząd macierzy $(\lambda E-A)$ jest mniejszy niż n. A zatem, wyznacznik macierzy kwadratowej $(\lambda E-A)$ równa się zeru. Niech x – zmienna. Rozpatrzmy macierz $(xE-A)$.

Nietrudno ustalić, że wyznacznikiem $|xE-A|$ macierzy $(xE-A)$ jest wielomian stopnia n zmiennej x; f(x)= $|xE-A|$. Przecież wartość własna λ operatora φ jest pierwiastkiem równania f(x)=0.

Jeśli $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n\}$– pewna inna baza przestrzeni U i T – macierz przejścia z bazy $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ do bazy $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n\}$, to macierz operatora liniowego φ w bazie $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \dots, \overline{f}_n\}$ równa się $T^{-1}AT$. Dlatego:

$$xE-T^{-1}AT = T^{-1}(xE)T-T^{-1}AT = T^{-1}(xE-A)T,$$

gdyż macierz skalarów xE jest przestawialna z dowolną macierzą; a zatem,

$$|xE-T^{-1}AT|=|T^{-1}(xE-A)T| = |T^{-1}||xE-A||T| = |xE-A| = f(x).$$

Tu skorzystaliśmy z zasady obliczania wyznacznika iloczynu macierzy. Zatem udowodniliśmy, że wielomian f(x)= $|xE-A|$, gdzie A – macierz operatora φ w danej bazie, nie zależy od wyboru bazy.

OKREŚLENIE 8.2.

Niech φ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U nad ciałem F i A – macierz tego operatora w dowolnie wybranej bazie. Wielomian f(x)= $|xE-A|$ nazywa się wielomianem charakterystycznym operatora liniowego φ, a równanie f(x)=0 nazywa się równaniem charakterystycznym tego operatora.

Z podanych wyżej pojęć wynika, że wartości własne operatora liniowego φ są pierwiastkami jego równania charakterystycznego. Z tego powodu nazywa się je także liczbami charakterystycznymi operatora liniowego φ.

Algorytm obliczenia wektorów własnych

Do znajdywania współrzędnych wektorów własnych operatora liniowego φ w bazie $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ przestrzeni U należy:

1. Zestawić równanie charakterystyczne f(x)=0 operatora liniowego φ;
2. Znaleźć pierwiastki równania charakterystycznego, które należy do ciała F; będą to wartości własne operatora liniowego φ;
3. Dla każdej wartości własnej λ_0 operatora φ znajdujemy współrzędne wektorów własnych tego operatora, które należą do wartości własnej λ_0; w tym celu należy rozwiązać układ równań (8.1)

$$(\lambda_0 \ E\text{-}A)\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \cdots\\ \gamma_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix} \qquad (8.1)$$

gdzie A – macierz operatora liniowego φ w wybranej bazie, ($\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$) – wiersz współrzędnych wektora własnego w tej bazie. Ponieważ rząd macierzy $\lambda_0 E\text{-}A$ jest mniejszy niż n, to układ (8.1) posiada niezerowe rozwiązanie. W rzeczywistości wystarczy znaleźć fundamentalny układ rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych (8.1).

Rozdział 9. Macierz Jordana

Przystąpimy teraz do tworzenia najprostszej formy macierzy operatora liniowego φ, który istnieje w przestrzeni wektorowej U nad ciałem F. Załóżmy, że wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego operatora liniowego φ należą do ciała F.

TWIERDZENIE 9.1 (Hamiltona-Cayley'a).

Jeśli f(x) – wielomian charakterystyczny operatora liniowego φ, to f(φ)=0.

Uwaga 1

W rozdziale „Operatory liniowe" zostały określone terminy: suma, różnica, iloczyn operatorów liniowych (a więc i potęgi naturalne danego operatora liniowego) oraz iloczyn operatora liniowego i skalara. Dlatego wartość wielomianu zależy od operatora liniowego. Oprócz tego, z własności łączności mnożenia odwzorowań wynika, że $\varphi^k\varphi^m = \varphi^m\varphi^k = \varphi^{m+k}$. Dlatego dla dowolnych wielomianów f(x) i g(x) nad ciałem F, f(x)g(x)= =g(x)f(x).

Dowód:

Będziemy udowadniać twierdzenie indukcji, według wymiaru przestrzeni U. Jeśli wymiar U równa się 1, to baza przestrzeni U składa się z jednego wektora $\bar{a}$. Dlatego wielomian charakterystyczny f(φ) operatora φ w tym przypadku równa się $x-\lambda$; f(x)= $=x-\lambda$. A zatem: f(φ)= $\varphi-\lambda$; f(φ)($\bar{a}$)=($\varphi-\lambda$)($\bar{a}$)= φ ($\bar{a}$)- $\lambda\bar{a}$ = $\lambda\bar{a}$ - $\lambda\bar{a}$ = $\bar{0}$. Ponieważ operator liniowy f(φ) przekształca w wektor zerowy wektor bazowy $\bar{a}$, to f(φ)=0. Dla n=1 twierdzenie jest prawdziwe.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla operatora, który istnieje w przestrzeni o wymiarze n. Niech teraz operator liniowy φ istnieje w przestrzeni U nad ciałem F, której wymiar wynosi (n+1).

Niech λ_0 – dowolny pierwiastek wielomianu charakterystycznego operatora φ. Zgodnie z warunkiem $\lambda_0 \in F$. Jak widać z poprzedniego rozdziału w U istnieje wektor własny $\bar{a}$, który należy do wartości własnej λ_0; $\varphi(\bar{a}) = \lambda_0\bar{a}$. Niech f(x) – wielomian charakterystyczny operatora liniowego φ. Wtedy f(x)= ($x-\lambda_0$)g(x), gdzie g(x) – wielomian stopnia n. Załóżmy, że $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n, \bar{a}\}$ – baza przestrzeni U, która zawiera w sobie wektor własny $\bar{a}$. Na skutek lematu 6.1, macierz operatora φ posiada w tej bazie postać:

$$A = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & B & \dots \\ & & 0 \\ \mu_1 & \dots\ \mu_n & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Wtedy:

$$f(x)=|xE-A|=\begin{vmatrix} & & 0 \\ & xE-B & \dots \\ & & 0 \\ -\mu_1 & \dots -\mu_n & \lambda_0 \end{vmatrix}=(x-\lambda_0)|xE-B|$$

zgodnie z własnością wyznaczników. Z drugiej strony, f(x)=($x-\lambda_0$)g(x); dlatego g(x)=|xE-B|. Niech V=L($e_1, e_2, \ldots, e_n$), oznaczymy przez φ_1 operator liniowy, który istnieje w przestrzeni V i w bazie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ posiada macierz B. Zgodnie z założeniem indukcji, g(φ_1)=0, ponieważ g(x)=|xE-B| – wielomian charakterystyczny operatora φ_1. Na skutek twierdzenia 8.5 macierz operatora g(φ_1) w bazie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ równa się g(B)=0. Stąd zgodnie z zasadą działania na macierzach komórkowych otrzymamy:

$$g(A)=\begin{bmatrix} & & 0 \\ g(B) & & \dots \\ & & 0 \\ v_1 & \dots v_n & v_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & 0 \\ 0 & & \dots \\ & & 0 \\ v_1 & \dots v_n & v_{n+1} \end{bmatrix}$$

W ten sposób, g(φ)($\bar{e}_i$)= $v_i\,\bar{a}$, i=1, 2, ..., n; dlatego f(φ)($\bar{e}_i$)=($\varphi-\lambda_0$)g(φ)($\bar{e}_i$)=($\varphi-\lambda_0$)($v_i\,\bar{a}$)= v_i (φ ($\bar{a}$)- λ_0 ($\bar{a}$)= v_i ($\lambda_0\,\bar{a}$ - $\lambda_0\,\bar{a}$)= $\bar{0}$.

Oprócz tego, oczywistym jest: f(φ)($\bar{a}$) = g(φ)($\varphi-\lambda_0$)($\bar{a}$) = $\bar{0}$. Zatem f(φ) wszystkie wektory bazowe przestrzeni U odwzorowują wektor zerowy, to znaczy f(φ)=0. Założenie indukcji zostało potwierdzone.

Twierdzenie zostało dowiedzione.

Ponieważ wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego operatora liniowego φ należą do ciała F, to

f(x)= $(x-\lambda_1)^{S_1}(x-\lambda_2)^{S_2}\dots(x-\lambda_k)^{S_k}$, $\sum_{i=1}^{k} s_i = n$.

Uwaga 2

Twierdzenie Hamiltona-Cayley'a jest prawdziwe i w tym przypadku, gdy nie wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego operatora φ należą do ciała F. Podany wyżej dowód dla tego przypadku powinien zostać zmodyfikowany w następujący sposób: ciało F należy rozszerzyć na ciało K, przyłączając do niego wszystkie wartości własne operatora liniowego φ oraz uwzględniając, że operator φ istnieje w przestrzeni wektorowej W nad ciałem K, której baza pokrywa się z bazą danej przestrzeni wektorowej V. Korzystając z tego, że f(φ) jako operator, który istnieje w przestrzeni W, równa się 0. A zatem: f(φ)=0 w przestrzeni V, której elementy odwzorowują podzbiór zbioru W.

OKREŚLENIE 9.1.

Niech λ_0 – pierwiastek wielomianu charakterystycznego f(x) operatora liniowego φ, $\lambda_0 \in F$. Podprzestrzenią pierwiastkową operatora liniowego φ, który odpowiada pierwiastkowi λ_0, nazywa się zbiór V wszystkich wektorów $\bar{a} \in U$ takich, że $(\varphi-\lambda_0)^k(\bar{a})=\bar{0}$ dla pewnej liczby naturalnej k.

Zbiór V jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej U, co nietrudno dowieść przy pomocy twierdzenia 3.2, to potwierdza termin podprzestrzeń pierwiastkowa.

LEMAT 9.1.

Jeśli φ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U i h(x) – dowolny wielomian, to $\mathrm{Im}(h(\varphi))$ jest φ - niezmienniczą podprzestrzenią przestrzeni U.

Dowód:

Niech $\bar{u} \in \mathrm{Im}(h(\varphi))$; wtedy $\bar{u}$= $h(\varphi)$ ($\bar{v}$), $\bar{v} \in U$. Dlatego φ ($\bar{u}$)= φ ($h(\varphi)$ ($\bar{v}$))= $h(\varphi)$ x x φ ($\bar{v}$) $\in \mathrm{Im}\,\varphi$, co należało udowodnić.

LEMAT 9.2.

Podprzestrzenie pierwiastkowe operatora liniowego φ są φ – podprzestrzeniami niezmienniczymi.

Dowód:

Niech V – podprzestrzeń pierwiastkowa operatora liniowego φ, odpowiadająca pierwiastkowi λ_0 wielomianu charakterystycznego f(x) operatora φ. Jeśli $\bar{u} \in V$ to

$(\varphi-\lambda_0 E)^m(\varphi(\bar{u}))=\varphi((\varphi-\lambda_0 E)^m(\bar{u}))=\bar{0}$,

to znaczy $\varphi(\bar{u})\in V$, co należało udowodnić.

Niech V_i - podprzestrzeń pierwiastkowa operatora liniowego φ, który odpowiada wartości własnej λ_i.

TWIERDZENIE 9.2.

Przestrzeń wektorowa U nad ciałem F, w której istnieje operator liniowy φ, rozkłada się na prostą sumę podprzestrzeni pierwiastkowych operatora φ.

Dowód:

Niech f(x)= $\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{S_i}$ – wielomian charakterystyczny operatora liniowego φ. Będziemy udowadniać twierdzenie indukcji według liczby k różnych pierwiastków wielomianu f(x). Jeśli k=1, to na skutek twierdzenia Hamiltona-Cayley'a, cała przestrzeń U jest podprzestrzenią pierwiastkową, odpowiadającą jednemu pierwiastkowi f(x). Dlatego U jest prostą sumą jednego składnika. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wartości $k\geq 1$.

Udowodnimy jego prawdziwość dla przypadku, kiedy liczba wartości własnych równa się k+1. Niech

f(x)=$(x-\lambda_1)^{S_1}(x-\lambda_2)^{S_2}\ldots(x-\lambda_k)^{S_k}(x-\lambda_{k+1})^{S_{k+1}}$; znaczymy przez g(x) wielomian $(x-\lambda_1)^{S_1}(x-\lambda_2)^{S_2}\ldots(x-\lambda_k)^{S_k}$, a przez h(x) – wielomian $(x-\lambda_{k+1})^{S_{k+1}}$. Wtedy f(x)= g(x)h(x); wskutek twierdzenia Hamiltona-Cayley'a f(φ)=0, to znaczy

$$g(\varphi)h(\varphi)=0 \qquad (9.1)$$

Z drugiej strony g(x) i h(x) – wielomiany wzajemnie proste. Dlatego istnieją wielomiany p(x) i r(x) takie, że p(x) g(x)+ h(x)r(x)$\equiv 1$. Podstawiając do tej tożsamości operator φ zamiast x otrzymamy: p(φ) g(φ)+ h(φ)r(φ)$\equiv e$ (9.2),

Gdzie e – operator tożsamościowy, który istnieje w przestrzeni U. Niech

$$V=\{g(\varphi)(\bar{u})\mid \bar{u}\in U\},\ W=\{h(\varphi)(\bar{u})\mid \bar{u}\in U\}$$

Ponieważ V i W odwzorownia operatorów liniowych h(x) i g(x), to zgodnie z twierdzeniem 6.2, V i W – podprzestrzenie U. Udowodnimy, że $V\cup W=\{0\}$ (patrz: (9.1)).

Rzeczywiście, $\bar{x}$ =e$\bar{x}$ =p(φ)g(φ)$\bar{x}$ +h(φ)r(φ)$\bar{x}$ =p(φ)($\bar{0}$)+r(φ)($\bar{0}$)=$\bar{0}$.

Zatem, $\bar{x}=\bar{0}$ и $U\cap W=\{0\}$. Oprócz tego,

$\bar{x}$ =e$\bar{x}$ =p(φ)(g(φ)$\bar{x}$)+r(φ)(h(φ)$\bar{x}$)=p(φ)$\bar{v}$ +r(φ)$\bar{w}$, $\bar{v}\in V$, $\bar{w}\in W$. Na skutek lematu 7.1, p(φ)$\bar{v}$ =$\bar{v}_1\in V$,r(φ)$\bar{w}$ =$\bar{w}_1\in W$.

Zatem, $\bar{x}\in V+W$ a ponieważ $U\cap W=\{0\}$, to $U=V\oplus W$. Jeśli $\bar{v}\in V$, to $\bar{v}$ g(φ)(u), u$\in U$ i na skutek (9.1), h(φ)g(φ)(u)= = h(φ)($\bar{v}$)=$\bar{0}$. Z drugiej strony, jeśli h(φ)($\bar{x}$)=$\bar{0}$, to z relacji: $\bar{x}$ =p(φ)g(φ)($\bar{x}$)+r(φ)h(φ)($\bar{x}$) otrzymamy: $\bar{x}$ = g(φ)(p(φ)$\bar{x}$)$\in V$.

Zatem, V – podprzestrzeń pierwiastkowa operatora φ, odpowiadająca pierwiastkowi λ_{k+1}. Z drugiej strony, W – φ-podprzestrzeń niezmiennicza (inwariantna). Tak jak w dowodzie twierdzenia Hamiltona-Cayley'a, można pokazać, że g(φ) - wielomian charakterystyczny ograniczenia operatora φ w W.

Zgodnie z założeniem indukcji $W=W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_k$, gdzie W_i – podprzestrzeń pierwiastkowa operatora φ, odpowiadająca pierwiastkowi λ_i; i=1, 2, ..., k. Wobec tego $U=V\oplus W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_k$, co należało udowodnić.

Jeśli za bazę przestrzeni U wziąć sumę baz podprzestrzeni pierwiastkowych operatora φ, to w danej bazie będzie mieć postać komórkową:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

gdzie A_i – macierz ograniczenia operatora φ w podprzestrzeni pierwiastkowej, odpowiadającej pierwiastkowi λ_i; и=1, 2, ..., k. Dlatego zadanie znajdywania bazy, w której macierz operatora liniowego φ posiadałaby prostszą postać, sprowadza się do analogicznego zadania dla podprzestrzeni pierwiastkowych.

Zatem, niech U – przestrzeń, φ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U, przy czym wielomian charakterystyczny f(x)=$(x-\lambda)^n$.

Rozpatrzymy na początku przypadek, kiedy w przestrzeni U istnieje taki wektor $\overline{u}$, który $(\varphi-\lambda e)^{n-1}(\overline{u})\neq\overline{0}$. Niech $\overline{u}_0=\overline{u}$, $\overline{u}_i=(\varphi-\lambda e)^i(\overline{u}_0)$, i=1, 2, ..., n-1. Pokażemy, że $\{\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_{n-1}\}$ – baza przestrzeni U. W tym celu wystarczy ustanowić liniową niezależność danego układu wektorów. Niech $\sum_{i-0}^{n-1}\alpha_i\overline{u}_i=\overline{0}$. Na skutek twierdzenia Hamiltona-Cayley'a $(\varphi-\lambda e)^n(\overline{u}_0)=\overline{0}$.

Dlatego dla i>0 $(\varphi-\lambda e)^{n-1}(\overline{u}_i)$=$(\varphi-\lambda e)^{n+i-1}(\overline{u}_0)=\overline{0}$. Z drugiej strony $(\varphi-\lambda e)^{n-1}(\overline{u}_0)=\overline{u}_{n-1}\neq\overline{0}$ zgodnie z warunkiem. Stąd $(\varphi-\lambda e)^{n-1}(\sum_{i-0}^{n-1}\alpha_{iu}\overline{u}_i$)=$\alpha_0\overline{u}_{n-1}=\overline{0}$; dlatego $\alpha_0=0$. Zatem: $\sum_{i-0}^{n-1}\alpha_{iu}\overline{u}_i=\overline{0}$; stosując do tej relacji operator $(\varphi-\lambda e)^{n-2}$, otrzymamy $\alpha_1=0$. Powtarzając ten proces, będziemy mieli: $\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_{n-1}=0$. Zatem: $\{\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_{n-1}\}$ – baza przestrzeni U. W tej bazie macierz operatora φ ma postać:

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Macierz danej postaci nazywa się *klatką Jordana.* Wykażemy teraz, że jeśli U – podprzestrzeń pierwiastkowa operatora φ, to w ogólnym przypadku macierz φ w pewnej bazie ma postać:

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$$

gdzie B_i - klatka Jordana i=1, 2, ..., k. Dana macierz nazywa się *jordanowską.*

Zatem, niech $(\varphi-\lambda e)^S$ =0, $(\varphi-\lambda e)^{S-1}\neq 0$; s<n (przypadek s=n rozpatrzony był powyżej). Jeśli $\overline{u}_0\in U$ jest takim wektorem, który $(\varphi-\lambda e)^{S-1}(\overline{u}_0)\neq 0$, to niech $\overline{u}_i$ = $(\varphi-\lambda e)^i(\overline{u}_0)$, i=1,2,...,s-1. Powyżej ustanowiono, że układ wektorów $\{\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_{s-1}\}$ – jest liniowo niezależny.

Niech $V=L\{\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_{s-1}\}$. Oczywiście L – φ- niezmiennicza podprzestrzeń przestrzeni U. Niech W – φ- niezmiennicza podprzestrzeń w U o maksymalnym wymiarze, która spełnia warunek $V \cap W = \{\overline{0}\}$. Wykażemy, że $U = V \oplus W$. W tym celu wystarczy ustanowić, że $U=V+W$. Jeśli to nie jest spełnione, to w U istnieje taki wektor $\overline{x}$, który $\overline{x} \notin V + W$, ale $(\varphi - \lambda e)(\overline{x}) \in V + W$. Ponieważ $(\varphi - \lambda e)(\overline{x}) \in V + W$, to $(\varphi - \lambda e)(\overline{x}) = \overline{v} + \overline{l}$, $\overline{v} \in V$, $\overline{l} \in W$. Mamy

$$(\varphi - \lambda e)^{S-1}((\varphi - \lambda e)(\overline{x}))=(\varphi - \lambda e)^{S}(\overline{x}) = \overline{0},$$

$$(\varphi - \lambda e)^{s-1}(\overline{v} + \overline{l})=(\varphi - \lambda e)^{S-1}(\overline{l}) +(\varphi - \lambda e)^{S-1}(\overline{v}) = \overline{0}$$

. Ponieważ V i W – φ- niezmiennicze podprzestrzenie oraz $V \cap W = \{\overline{0}\}$, to $(\varphi - \lambda e)^{S-1}(\overline{v}) = \overline{0}$, dlatego $\overline{v} = \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i \overline{u}_i$; w ten sposób

$$\overline{v}=(\varphi - \lambda e)\ (\sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i u_{i-1})=(\varphi - \lambda e)(\overline{v}_1),\ \text{gdzie}\ \overline{v}_1=\sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i u_{i-1} \in V.$$

Wobec tego $(\varphi - \lambda e)(\overline{x})=(\varphi - \lambda e)(\overline{v}_1)+\overline{l}$, lub $(\varphi - \lambda e)(\overline{x} - \overline{v}_1) \in W$, ale $(\overline{x} - \overline{v}_1) \in V + W$. Rozpatrzymy podprzestrzeń $T=L(\overline{f}_1, ..., \overline{f}_k, \overline{x} - \overline{v}_1)$, gdzie $\{\overline{f}_1, ..., \overline{f}_k\}$ – baza podprzestrzeni W. Oczywiście $T \supset W$, ale $T \neq W$, bowiem $(\overline{x} - \overline{v}_1) \notin W$. Z drugiej strony $(\varphi - \lambda e)(\overline{x} - \overline{v}_1) \in W$, to znaczy $\varphi(\overline{x} - \overline{v}_1) - \lambda_1 (\overline{x} - \overline{v}_1) \in W \subset T$, lub $\varphi(\overline{x} - \overline{v}_1) \in T$.

Oprócz tego: $\varphi(\overline{f}_i) \in W \subset T$, i=1, 2, ..., k wskutek φ - niezmienniczości podprzestrzeni W. Przecież T – także φ - podprzestrzeń niezmiennicza oraz $T \cap V = \{\overline{0}\}$.

Rzeczywiście, jeśli $\overline{g} \in T \cap V$, to $\overline{g}=\alpha(\overline{x} - \overline{v}_1) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \overline{u}_i$. Współczynnik $\alpha \neq 0$, w przeciwnym razie $(\overline{x} - \overline{v}_1) \in V + W$. Ponieważ $\alpha = 0$, to $\overline{g} \in V \cap W = \{\overline{0}\}$, to znaczy $\overline{g} = \overline{0}$. Zatem, T – φ- podprzestrzeń niezmiennicza, $T \cap V = \{\overline{0}\}$ i wymiar T jest większy od wymiaru W. Przeczy to wyborowi podprzestrzeni W. Zatem: $U = V \oplus W$. Ponieważ wymiar W jest mniejszy od wymiaru U, to zgodnie z zasadami indukcji można uważać, że w jakiejś bazie podprzestrzeni W macierz ograniczenia operatora φ w W jest jordanowska.

Na skutek φ- inwariantności podprzestrzeni V, macierz operatora φ w odpowiedniej bazie przestrzeni U także będzie jordanowską. Będziemy nazywać jordanowską także macierz postaci:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}$$

gdzie A_i – klatka Jordana, i=1, 2, ..., m; przy tym wartości własne, którym odpowiadają klatki A_i mogą być różne.

TWIERDZENIE 9.3.

Niech φ – operator liniowy, który istnieje w przestrzeni U nad ciałem F, przy czym wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego operatora φ należą do F; wtedy macierz operatora φ w odpowiedniej bazie przestrzeni U jest jordanowską.

W celu praktycznego znajdywania macierzy jordanowskiej operatora liniowego φ można postępować według następującego schematu. Oznaczymy przez d_i defekt operatora liniowego $(\varphi - \lambda_0 e)^i$, gdzie λ_0 – dana wartość własna operatora φ. W celu znalezienia defektu operatora liniowego należy z wymiaru przestrzeni U odjąć rząd operatora, to znaczy rząd macierzy tego operatora w dowolnej bazie.

Wtedy d_1 – ogólna liczba klatek Jordana, które odpowiadają wartości własnej λ_0; ($d_2 - d_1$) – liczba klatek o wymiarze większym niż 1, ($d_i - d_{i-1}$) – liczba klatek o wymiarze większym niż 1. Ponieważ przestrzeń U posiada wymiar skończony, to dla pewnego k, $d_k = d_{k+1}$. Zatem klatki Jordana, które odpowiadają wartości własnej λ_0, posiadają maksymalny rozmiar k.

Klatek o takim rozmiarze mamy ($d_k - d_{k-1}$) sztuk. Klatek o rozmiarze (k-1) będzie ($d_{k-1} - d_{k-2}$) – ($d_k - d_{k-1}$) sztuk, itd. Algorytm tworzenia postaci Jordana macierzy operatora liniowego i przykład jego zastosowania zostały podane w rozdziale 11.

Rozdział 10. Przestrzenie euklidesowe

OKREŚLENIE 10.1.

Wektorową przestrzenią Euklidesa nazywa się przestrzeń wektorową V nad ciałem liczb rzeczywistych R, dla której określono odwzorowanie τ: V x $V \to R$, które posiada następujące własności:

1. $\tau(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$ przy czym, jeśli $\bar{a} \neq 0$, to $\varphi(\bar{a}) > 0$;
2. $\tau(\bar{a}, \bar{b}) = \tau(\bar{b}, \bar{a})$;
3. $\tau(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = \tau(\bar{a}, \bar{b}) + \tau(\bar{a}, \bar{c})$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$
4. $\tau(\alpha\bar{a}) = \alpha\tau(\bar{a})$, $\alpha \in R$, $\bar{a} \in V$

Liczba $\tau(\bar{a}, \bar{b}) \in R$ nazywa się iloczynem skalarnym wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$. Dla wygody $\tau(\bar{a}, \bar{b})$ będziemy oznaczać przez $\bar{a}\,\bar{b}$. Z własności 3 i 4 iloczynu skalarnego wynika, że $\bar{a}\,\bar{0}$=0 dla każdego $\bar{a} \in V$ i $\bar{a}(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \bar{b}_i)$=$\sum_{i=1}^{k} \beta_i (\bar{a}_i \bar{b}_i)$.

OKREŚLENIE 10.2.

Wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ przestrzeni euklidesowej V nazywają się ortogonalnymi, jeśli $\bar{a}\,\bar{b}$=0; $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nazywają się także wzajemnie ortogonalnymi.

OKREŚLENIE 10.3.

Układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}\}$ nazywa się ortogonalnym, jeśli dwa dowolne wektory tego układu są wzajemnie ortogonalne. Ortogonalny układ wektorów, który jest bazą przestrzeni V, nazywa się ortogonalną bazą tej przestrzeni.

TWIERDZENIE 10.1.

Ortogonalny układ niezerowych wektorów przestrzeni euklidesowej jest liniowo niezależny.

Dowód:

Niech $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}\}$ – ortogonalny układ wektorów przestrzeni euklidesowej V, $\bar{a}_i \neq 0$, i=1, 2, ..., m. Niech $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{a}_i = \bar{0}$; wtedy 0=$\bar{a}_j \bar{0}$ =$\bar{a}_j$ ($\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{a}_i$)=$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{a}_j \bar{a}_i$ =$\alpha_j \bar{a}_j \bar{a}_j$, j=1, 2, ..., m. Stąd $\alpha_j = 0$, bowiem $\bar{a}_j \bar{a}_j$>0. To znaczy $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}\}$ jest liniowo niezależny.

Twierdzenie zostało udowodnione.

TWIERDZENIE 10.2.

Każdy ortogonalny układ niezerowych wektorów przestrzeni euklidesowej V może zostać uzupełniony do ortogonalnej bazy tej przestrzeni.

Dowód:

Niech n – wymiar przestrzeni V i $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}\}$ – ortogonalny układ wektorów niezerowych w V. Jeśli m=n, to dowód jest oczywisty. Jeśli m<n, to udowodnimy istnienie ortogonalnego układu wektorów niezerowych, który zawiera (m+1) wektorów. W rzeczy samej, o ile m<n, to w przestrzeni V istnieje taki wektor $\bar{b}$, że układ $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}, \bar{b}\}$ jest liniowo niezależny. Niech $\bar{a}_{m+1}$ = $\bar{b}$ + $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{a}_i$ i dobierzemy współczynniki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tak, aby układ $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}, \bar{a}_{m+1}\}$ był ortogonalny. Jeśli

$k \leq m$; $j \leq m$, $k \neq j$, to $\bar{a}_k \bar{a}_j = 0$ zgodnie z warunkiem. Niech j=m+1, wtedy $\bar{a}_k \bar{a}_{m+1} = \bar{a}_k$ ($\bar{b}$ + $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{a}_i$)= $\lambda_k \bar{a}_k \bar{a}_k$ + $\bar{a}_k \bar{b}$, $k \leq m$. Przyrównując to wyrażenie do zera otrzymamy:

$$\lambda_k = -\frac{\bar{a}_k \bar{b}}{\bar{a}_k \bar{a}_k}, \ (\bar{a}_k \bar{a}_k > 0\ ),\ k=1, 2, ..., m.$$

Przy takim wyborze współczynników λ_i układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}, \overline{a}_{m+1}\}$ będzie ortogonalny. Oprócz tego $\bar{a}_{m+1} \neq 0$, bowiem układ wektorów $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}, \bar{b}\}$ jest liniowo niezależny. $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}, \overline{a}_{m+1}\}$ – ortogonalny układ wektorów niezerowych. Jeśli m=n, to twierdzenie jest udowodnione. Jeśli jednak m+1<n, to kontynuujemy proces rozszerzenia ortogonalnego układu wektorów niezerowych, dopóki nie otrzymamy bazy ortogonalnej.

WNIOSEK 10.1.

Dowolna przestrzeń euklidesowa V posiada bazę ortogonalną.

Dowód:

Niech $\bar{a}_1 \in V$, $\bar{a}_1$ – dowolny wektor niezerowy. Niech $\{\bar{a}_1\}$ początkowy układ wektorów niezerowych i uzupełnimy go do bazy ortogonalnej przestrzeni V.

OKREŚLENIE 10.4.

Niech M – niepusty podzbiór wektorów przestrzeni euklidesowej V. Wektor $\bar{a}$ nazywa się ortogonalnym do zbioru M, jeśli $\bar{a}$ jest ortogonalny do każdego wektora zbioru M.

Wektor $\bar{a}$ jest ortogonalny do zbioru M i oznacza się jako: $\bar{a} \perp M$. Przez $M^{\perp}$ oznacza się zbiór wszystkich wektorów, ortogonalnych do zbioru M.

Przy pomocy własności 3 i 4 iloczynu skalarnego łatwo dowieść domknięcia zbioru $M^{\perp}$ względem dodawania wektorów i mnożenia wektora przez skalar. Zatem, na skutek twierdzenia 3.2, $M^{\perp}$ – podprzestrzeń przestrzeni wektorowej V.

OKREŚLENIE 10.5.

Niech W – podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej V. Podprzestrzeń $M^{\perp}$ nazywa się ortogonalnym dopełnieniem do przestrzeni W.

TWIERDZENIE 10.3.

Jeśli W – niezerowa podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej V, $W \neq V$, to $V = W \oplus W^{\perp}$.

Dowód:

Niech $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}\}$ – ortogonalna baza podprzestrzeni W. Na skutek twierdzenia 3.2, dany układ wektorów można uzupełnić do ortogonalnej bazy przestrzeni V. Niech $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}, \bar{a}_{m+1}, \ldots, \bar{a}_n\}$ – ortogonalna baza przestrzeni V (m<n). Łatwo udowodnić, że $W^{\perp}=L(\bar{a}_{m+1}, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$). Wtedy $V = W \oplus W^{\perp}$.

Twierdzenie zostało udowodnione.

OKREŚLENIE 10.6.

Wartością bezwzględną wektora (normą wektora) przestrzeni euklidesowej nazywa się pierwiastek kwadratowy ze skalarnego kwadratu wektora.

Wartość bezwzględną wektora $\bar{a}$ oznacza się przez $|\bar{a}|$. Zgodnie z określeniem $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bar{a}}$. Jeśli $|\bar{a}|=1$, to wektor $\bar{a}$ nazywa się unormowanym.

TWIERDZENIE 10.4.

Jeśli $\bar{a}$ i $\bar{b}$ – wektory przestrzeni euklidesowej oraz $\lambda \in R$ to:

1) $|a| \geq 0$, $|\overline{a}| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{a}$=1;

2) $|\lambda\overline{a}| = |\lambda||\overline{a}|$;

3) $|\overline{a}\,\overline{b}| \leq |\overline{a}||\overline{b}|$ (nierówność Cauchy-Buniakowskiego);

4) $|\overline{a} + \overline{b}| \leq |\overline{a}| + |\overline{b}|$ (nierówność trójkąta).

Dowód:

1) Oczywisty;

2) $|\lambda\overline{a}| = \sqrt{(\lambda\overline{a})(\lambda\overline{a})} = \sqrt{\lambda^2\overline{a}\overline{a}} = |\lambda|\sqrt{\overline{a}\overline{a}} = |\lambda||\overline{a}|$;

3) Jeśli $\overline{a} = \overline{0}$ lub $\overline{b} = \overline{0}$, to nierówność z punktu 3 jest spełniona.

Niech $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$. Wtedy dla dowolnych $\alpha, \beta \in R$, $(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b})(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) \geq 0$; stąd $\alpha^2\overline{a}\,\overline{a} + 2\alpha\beta\overline{a}\,\overline{b} + \beta^2\overline{b}\,\overline{b} \geq 0$. Niech $\alpha = |\overline{b}|$, $\beta = |\overline{a}|$; wtedy $|\overline{a}|^2|\overline{b}|^2 + 2|\overline{a}||\overline{b}|\overline{a}\,\overline{b} + |\overline{b}|^2|\overline{a}|^2 \geq 0$; lub $2|\overline{a}||\overline{b}|(|\overline{a}||\overline{b}| + \overline{a}\,\overline{b}) \geq 0$. Ponieważ $|\overline{a}|\,|\overline{b}| > 0$, to $|\overline{a}|\,|\overline{b}| \geq -\overline{a}\,\overline{b}$. Otrzymana nierówność jest spełniona dla dowolnych wektorów niezerowych $\overline{a}$ i $\overline{b}$. Zamienimy w niej wektor $\overline{a}$ na ($-\overline{a}$). Ponieważ $|-\overline{a}| = |\overline{a}|$ (pkt.2 twierdzenia), to $|\overline{a}|\,|\overline{b}| \geq \overline{a}\,\overline{b}$; dlatego $|\overline{a}\,\overline{b}| \leq |\overline{a}||\overline{b}|$.

4) $|\overline{a} + \overline{b}|^2 = |\overline{a} + \overline{b}||\overline{a} + \overline{b}| = |\overline{a}|^2 + 2\overline{a}\,\overline{b} + |\overline{b}|^2 \leq |\overline{a}|^2 + 2|\overline{a}\,\overline{b}| + |\overline{b}|^2 = (|\overline{a}| + |\overline{b}|)^2$. Ponieważ $|\overline{a} + \overline{b}| > 0$ oraz $|\overline{a}| + |\overline{b}| > 0$, to wyciągając pierwiastek kwadratowy z obu części nierówności, otrzymamy: $|\overline{a} + \overline{b}| \leq |\overline{a}| + |\overline{b}|$.

OKREŚLENIE 10.7.

Układ wektorów euklidesowej przestrzeni wektorowej nazywa się ortonormalnym, jeśli przestrzeń jest ortogonalna i każdy jej wektor jest unormowany. Jeśli taki układ wektorów tworzy bazę przestrzeni euklidesowej, to nazywa się go ortonormalną bazą tej przestrzeni.

TWIERDZENIE 10.5.

W euklidesowej przestrzeni wektorowej istnieje baza ortonormalna.

Dowód:

Na skutek twierdzenia 10.3, w euklidesowej przestrzeni wektorowej istnieje baza ortogonalna $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \ldots, \overline{a_n}\}$. Ponieważ $\overline{a_i} \neq 0$, to $|\overline{a_i}| > 0$, i=1, 2, ..., n. Oczywiście układ wektorów $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \ldots, \overline{e_n}\}$, gdzie $\overline{e_i} = \frac{1}{|\overline{a_i}|}\overline{a_i}$, i=1, 2, ..., n będzie ortonormalną bazą naszej przestrzeni.

Algorytm ortogonalizacji układu wektorów i przykład jego zastosowania został przedstawiony w rozdziale 11.

Rozdział 11. System „Świat algebry liniowej”

W tym rozdziale przedstawimy krótkie wiadomości o środowisku programowym „Świat algebry liniowej” (ŚAL), przy pomocy którego czytelnik może samodzielnie badać algebrę liniową, w tym także rozwiązywać zadania z tej dyscypliny.

11.1 Wiadomości ogólne

Przeznaczenie systemu „Świat algebry liniowej”

Podstawowym przeznaczeniem ŚAL jest zastosowanie w celu samodzielnego opanowania materiału kursu „Algebra liniowa”. System daje możliwość użytkownikowi prowadzenia aktywnej działalności praktycznej, która posiada cechy poznawczą, badawczą oraz stosować współczesne technologie informacyjne jako narzędzie twórczego procesu poznania.

Położenie systemu ŚAL:

http://address.is.not.exist

Struktura systemu ŚAL

System ŚAL w swoim składzie posiada Miejsce pracy ucznia oraz Miejsce pracy nauczyciela.

Miejsce pracy ucznia

System ŚAL składa się z następujących komponentów:

„**Strona główna**”. Składnik ten pozwala użytkownikowi: otrzymać potrzebną informację o pracy z systemem, zarejestrować się na stronie szkoły w celu dalszej pracy i uruchomić system do pracy.

„Podręcznik”. Komponent służący do przedstawienia użytkownikowi potrzebnej pomocy teoretycznej. Podręcznik reprezentuje sobą strukturalny hipertekst z możliwością wsparcia przez techniki multimedialne.

Źródłem zadań ŚAL jest „**Zbiór zadań**” – składnik systemu, w którym znajdują się zadania. System opiera się na wszstkich podstawowych typach zadań kursu algebry liniowej. Każde z zadań „Zbioru zadań” można eksportować do „Środowiska rozwiązywania zadań” i rozwiązywać w tym środowisku. Rozwiązane zadania i zadania, których rozwiązywanie jest już rozpoczęte, ale nie zakończone, przechowywane są w „Zeszycie” użytkownika.

„**Środowisko rozwiązywania zadań**” – zunifikowane środowisko służące do rozwiązywania i sprawdzania poprawności rozwiązania zadań. Środowisko wspiera rozwiązywanie zadania krok po kroku z możliwością sprawdzenia prawidłowości rozwiązania na każdym kroku. Ważną cechą jest możliwość wyjścia ze „ślepego zaułka”, kiedy użytkownik nie wie, co dalej robić. W tym przypadku może się zwrócić o pomoc do „Eksperta”, który wykona następujący krok rozwiązania. Kiedy zadanie zostanie rozwiązane, środowisko informuje o wyniku rozwiązania zadania i pokazuje kolejność kroków - przekształceń.

„**Dyskusje**” – komponent przeznaczony do ogólnego omówienia pytań i problemów, które powstają w trakcie nauczania przedmiotu.

„**Statystyka**” – składnik służący do samokontroli użytkowników. W postaci wykresu przedstawiona jest liczba rozwiązanych zadań, samodzielność rozwiązania, liczba nowych i sprawdzonych zadań.

Współdziałanie modułów ŚAL

Z systemem nauczania na odległość mogą pracować tylko zarejestrowani użytkownicy. Rejestracja odbywa się poprzez uprawnione do tego osoby – tutorów lub administratorów strony uczelni.

Aby się zarejestrować należy przysłać zgłoszenie, w którym należy podać swoje dane. Następnie student otrzymuje identyfikator personalny (login) oraz hasło. Po otrzymaniu tych danych student może korzystać z systemu. Otrzymuje dostęp do materiału teoretycznego, zbioru zadań, dyskusji. Otrzymuje własny zeszyt do przechowywania zadań, które rozwiązuje oraz możliwość rozwiązywania ich w środowisku rozwiązywania zadań.

Rozpoczynając pracę z systemem, użytkownik powinien wprowadzić nadany mu login i hasło w odpowiednie pola. Jeśli wprowadzone dane są nieprawdziwe, to użytkownik otrzymuje komunikat „Dane nieprawidłowe". Jeżeli dane są prawidłowe, student otrzymuje dostęp do materiału teoretycznego, zbioru zadań i zeszytu, posiada możliwość posługiwania się „Środowiskiem rozwiązywania zadań".

Aby zakończyć pracę z należy nacisnąć przyciski „Log off". Po tym system bezpieczeństwa zniszczy informację o użytkowniku, a dalszy dostęp do zasobów będzie niemożliwy.

Uwaga! Jeśli użytkownik nie będzie się łączył z serwerem w przeciągu 20 minut, to system bezpieczeństwa dokona automatycznego zakończenia pracy. W celu kontynuowania pracy należy ponownie wprowadzić login i hasło.

Po tym, jak użytkownik wszedł do systemu, naciskając zakładkę „Podręcznik", posiada możliwość przejrzenia materiału teoretycznego, który jest mu potrzebny do rozwiązywania zadań. Tekst podręcznika zawiera hiperlinki, w ten sposób nauczenie się materiału jest dużo lżejsze.

Zaznajomiwszy się z materiałem teoretycznym, użytkownik ma możliwość zajrzenia do zbioru zadań, naciskając na zakładkę „Zbiór zadań". W zbiorze zadań przechowywane są zadania do rozwiązania. Wybrawszy sobie zadanie do rozwiązania, użytkownik powinien nacisnąć na odsyłacz „Dodaj do zeszytu". Po tym warunki wybranych zadań automatycznie zostają przesłane do zeszytu.

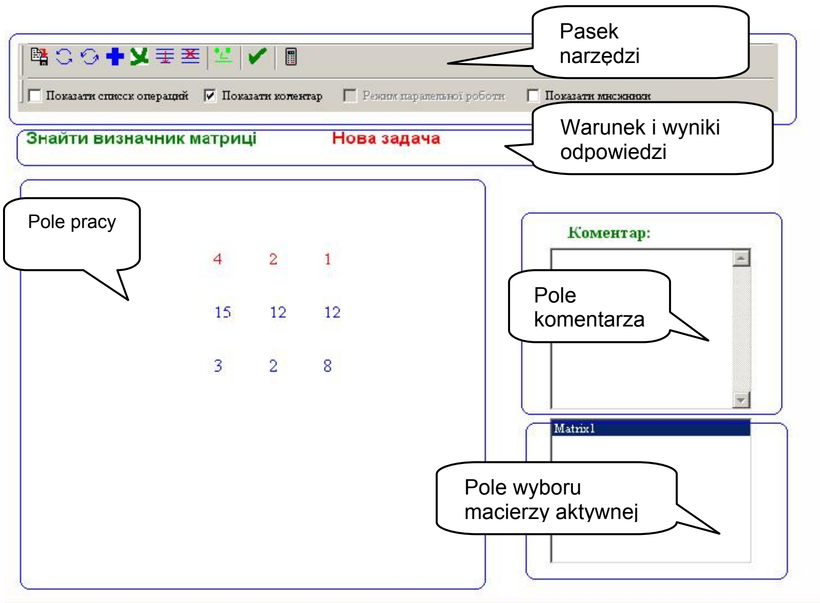
Nacisnąwszy na zakładkę „Zeszyt", użytkownik otrzymuje dostęp do swojego zeszytu. W zeszycie przechowywane są zadania użytkownika, które są podzielone na 5 rodzajów: nowe zadania (które jeszcze nie były rozwiązywane), nierozwiązane zadania (zadania, które użytkownik rozwiązywał, ale do końca nie rozwiązał), zadania rozwiązywane niesamodzielnie (rozwiązane zadania, przy rozwiązaniu których użytkownik uciekał się do pomocy eksperta), samodzielnie rozwiązane zadania (rozwiązane zadania, przy rozwiązywaniu których użytkownik nie korzystał z pomocy eksperta), sprawdzone zadania (rozwiązane zadania, które nauczyciel już sprawdził i postawił ocenę). Naciskając na zakładkę „Statystyka", można sprawdzić stosunek tych zadań w procentach. Użytkownik posiada możliwość usunięcia zadania z zeszytu, naciskając na odsyłacz „Usuń". W celu rozwiązania lub przejrzenia zadania należy nacisnąć na odsyłacz *„Załaduj do środowiska rozwiązania"*, przy tym zadanie zostanie automatycznie załadowane do Środowiska rozwiązywania zadań.

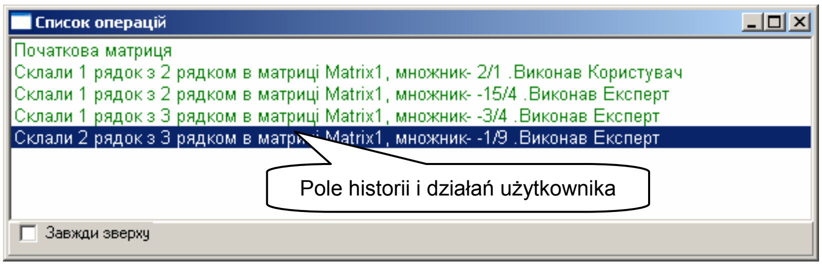
Naciskając na zakładkę „Dyskusje", użytkownik posiada możliwość rozważenia pytań i problemów, wynikłych w trakcie poznania przedmiotu. Można dodać nowy temat dyskusji, naciskając na odsyłacz „Dodaj nowy temat".

Środowisko rozwiązywania zadań.

Rozpatrzymy bardziej szczegółowo podstawowy składnik systemu – *Środowisko rozwiązywania zadań*.

Środowisko posiada kilka obszarów pracy – pasek narzędzi, pole przedstawienia warunku i wyników odpowiedzi, pole pracy, pole komentarza, pole wyboru macierzy aktywnej, pole historii działań użytkownika.





Proces rozwiązania zadania w „Środowisku rozwiązania zadania” reprezentuje sobą ciąg przekształceń (kroków) wejściowych obiektów matematycznych w taki sposób, aby otrzymać odpowiedź.

11.2 System poleceń Środowiska rozwiązywania zadań

Dokonywanie przekształceń macierzy

Przekształceń elementarnych można dokonać na wierszach macierzy.

- **Wykonanie przekształcenia elementarnego** $(\alpha\bar{a}+\bar{b})$: lewym przyciskiem myszy wyróżnić wiersz $\bar{b}$ oraz nacisnąć prawy klawisz myszy. W menu kontekstowym wybrać polecenie *„Wykonaj przekształcenie elementarne”*. Otworzy się okno wprowadzenia mnożnika. Wprowadzić mnożnik oraz α nacisnąć OK. Następnie, przytrzymując myszką wiersz $\bar{b}$, należy przeciągnąć go na wiersz $\bar{a}$ (wiersz, do którego dodaje się $\alpha\bar{a}$).
- **Zamiana miejscami wierszy**: naciskamy prawym przyciskiem myszy na wierszu, którego położenie chcemy zmienić oraz w menu kontekstowym wybieramy polecenie *„Zamień miejscami wiersze”*. Potem, przytrzymując myszką pierwszy wiersz, przeciągamy go do wiersza, z którym chcemy go zamienić miejscami.
- **Zamiana miejscami kolumn**: naciskamy prawym przyciskiem myszy na kolumnie, położenie której chcemy zmienić oraz w menu kontekstowym wybieramy polecenie *„Zamień miejscami kolumny”*. Następnie, przytrzymując myszką pierwszą kolumnę, przeciągamy ją do kolumny, z którą chcemy ją zamienić miejscami.
- **Mnożenie wiersza przez liczbę**: wyróżniamy potrzebny wiersz lewym klawiszem myszy i naciskamy prawy klawisz myszy. W menu kontekstowym wybieramy polecenie *„Pomnóż wiersz przez liczbę”*. Otworzy się okno wprowadzenia mnożnika. Należy wprowadzić mnożnik i nacisnąć na **OK**.

- **Dodanie wiersza zerowego**: lewym klawiszem myszy wyróżniamy wiersz, przed którym potrzeba wstawić wiersz zerowy oraz naciskamy prawy przycisk myszy. W menu kontekstowym wybieramy polecenie *„Dodaj wiersz zerowy”*.
- **Usunięcie wiersza zerowego**: lewym przyciskiem myszy wyróżniamy wiersz zerowy oraz naciskamy prawy przycisk myszy. W menu kontekstowym wybieramy polecenie *„Usuń wiersz zerowy”*.

Wykonywanie działań na macierzach

- **Dodawanie macierzy**: wyróżniamy lewym przyciskiem myszy pierwszą macierz i w menu kontekstowym wybieramy „Dodaj macierze”. Następnie przeciągamy wyróżnioną macierz do macierzy, do której trzeba dodać pierwszą.
- **Mnożenie macierzy przez liczbę**: wyróżniamy lewym przyciskiem myszy pierwszą macierz i w menu kontekstowym wybieramy *„Pomnóż macierz przez liczbę”*. Otworzy się okno wprowadzenia mnożnika. Wprowadzamy go i naciskamy OK.
- **Mnożenie macierzy**: wyróżniamy lewym przyciskiem myszy pierwszą macierz i w menu kontekstowym wybieramy *„Pomnóż macierze”*. Następnie przeciągamy wyróżnioną macierz do macierzy, przez którą trzeba pomnożyć pierwszą.
- **Transpozycja macierzy**: wyróżniamy macierz lewym przyciskiem myszy i w menu kontekstowym wybieramy *„Transpozycja macierzy ”*.
- **Znajdywanie macierzy odwrotnej**: wyróżniamy macierz lewym przyciskiem myszy i w menu kontekstowym wybieramy *„Znajdź macierz odwrotną”*.
- **Znajdywanie wyznacznika macierzy**: wyróżniamy macierz lewym przyciskiem myszy i w menu kontekstowym wybieramy *„Znajdź wyznacznik macierzy”*.
- **Znajdywanie wielomianu charakterystycznego**: wyróżniamy macierz lewym przyciskiem myszy i w menu kontekstowym wybieramy *„Znajdź wielomian charakterystyczny”*.
- **Znajdywanie wartości własnej i wektorów**: wyróżniamy macierz lewym przyciskiem myszy i w menu kontekstowym wybieramy *„Znajdź wartości własne i wektory”*.

11.3 Ćwiczenia

11.3.1 Układy równań liniowych.

Metoda Gaussa rozwiązywania układu równań liniowych polega na kolejnym rugowaniu zmiennych z równań wspomnianego układu przy pomocy przekształceń elementarnych. Rozpatrzmy odpowiednie przykłady.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 2x- & 4y+ & 9z= & 28 \\ 7x+ & 3y- & 6z= & -1 \\ 7x+ & 9y- & 9z= & 5 \\ 4x- & 2y+ & 15z= & 62 \end{cases}$$

Zapisujemy rozszerzoną macierz układu:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 15 & 62 \end{pmatrix}$$

Zastosujemy algorytm rugowania zmiennych przy pomocy przekształceń na wierszach macierzy rozszerzonej;

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 15 & 62 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 17 & -75/2 & -99 \\ 0 & 23 & -81/2 & -93 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 17 & -75/2 & -99 \\ 0 & 23 & -81/2 & -93 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -89 & -116 \\ 0 & 0 & -29 & -116 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -29 & -116 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zatem, dany układ równań liniowych odpowiada układowi:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 2y - z = 2 \\ -29z = -116 \end{cases}$$

Stąd otrzymamy;

z = 4, 2y – 4 = 2, 2y = 6, y = 3, 2x -12+36 = 28, 2x = 4, x = 2.

Zatem, rozwiązaniem układu jest wektor (2,3,4).

Przykład 2 . Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + y + 10z = 6 \end{cases}$$

Rozpatrujemy macierz rozszerzoną układu i przekształcamy ją.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & -4 & -28 & -13 \\ 0 & -3 & -21 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 13/4 \\ 0 & 1 & 7 & 10/3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Otrzymujemy układ, w którym ostatnie równanie ma postać 0=1/12. A więc dany układ równań liniowych nie jest rozwiązywalny.

Przykład 3. Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x - y + 3z - 2t = 0 \\ 7x - y + 10z - 4t = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Dany układ jest jednorodny. Zapisujemy jej macierz podstawową:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 7 & -1 & 10 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & -15 & 3 & -18 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Otrzymaliśmy układ:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ \quad -5y + z - 6t = 0 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ z czterema zmiennymi i dwoma równaniami. A jego rząd wynosi 2, ponieważ dwie zmienne są niezależne. Niech to będą zmienne *y* i *t*. Przenosimy zmienne zależne do lewych części równań;

$$\begin{cases} x + z = -2y - 2t \\ \quad z = 5y + 6t \end{cases}$$

Znajdujemy ogólne rozwiązanie układu:

(-7y-8t, y, +5y+6t, t).

Znajdujemy fundamentalny układ rozwiązań; nadajemy zmiennym *y* i *t* odpowiednio wartości (1,0), a potem (0,1). Otrzymamy wtedy dwa wektory: (- 7, 1, 5, 0) i (-8, 0, 6, 1). Te dwa wektory tworzą fundamentalny układ rozwiązań.

<u>Przykład 4</u>. Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Rozpatrzymy macierz rozszerzoną układu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zatem, dany układ jest układem równoważnym do układu:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ \quad -y + z = -1 \end{cases}$$

Ten układ 3-x zmiennych posiada rząd 2, dlatego jedna ze zmiennych jest wolna. Będziemy uważać za wolną zmienną z, wtedy y=z+1, x+2y-4z=1, x+2z+2-4z=1, x=2z-1. Ogólnym rozwiązaniem danego układu jest więc wektor (2z-1, z+1, z). Jeśli nada się z wartość, na przykład 0, to otrzymamy rozwiązanie szczególne (-1,1,0).

Rozwiązaniem ogólnym odpowiedniego jednorodnego układu równań liniowych jest wektor (2z, z, z).

Jeśli nada się z wartość 1, to otrzymamy fundamentalny układ rozwiązań odpowiedniego układu jednorodnego, który w danym przypadku składa się z jednego wektora (2, 1, 1).

Rozwiązywanie układu równań liniowych na podstawie wzorów Cramera

Niech dany jest kwadratowy układ równań liniowych, to znaczy układ, w którym liczba równań jest równa liczbie zmiennych.

Przykład. Znajdź rozwiązanie układu równań liniowych.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

W celu rozwiązania należy określić, czy podstawowa macierz A układu jest nieosobliwa. Jeśli tak, to znajdujemy wspólne rozwiązanie według wzorów Cramera: $\mathbf{x_i=|B_i|/|A|}$**,** gdzie B_i- macierz, otrzymana z A poprzez zamianę kolumny współczynników przy zmiennej x_i na kolumnę wyrazów wolnych.

Zestawimy macierz ze współczynników danego układu oraz znajdujemy jej rząd przy pomocy przekształceń elementarnych.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz A jest równoważna macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Macierz A jest nieosobliwa; jej rząd równa się 3.

Układ równań liniowych posiada jedno rozwiązanie. Do zastosowania wzorów Cramera obliczymy wyznacznik macierzy A, który jest równy jedności (2*1*1/2=1).

Znajdujemy x_1. W tym celu utworzymy B_1 poprzez zamianę pierwszej kolumny na kolumnę wyrazów wolnych i obliczymy wyznacznik.

$$B_1= \quad |B_1|=-2, \quad x_1=|B_1|/|A|, \quad x_1=- \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 2/1=-2.$$

Analogicznie znajdziemy x_2 i x_3.

$$B_2= \quad |B_2|=4, \quad x_2=|B_2|/|A|, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x_2=4/1=4.$$

$$B_3= \quad |B_3|=-2, \quad x_3=|B_3|/|A|, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad x_3=-2/1=-2.$$

Tak więc rozwiązaniem układu jest $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=-2$.

Temat „Układy równań liniowych”

Zadanie: Rozwiązać układ równań liniowych.

Ćwiczenie №1

$$\left\{\begin{array}{llllll} 2x & -y & -z & -t & -u & =1 \\ 3x & -6y & +4z & -3t & & =14 \\ 2x & -2y & +3z & & +u & =8 \\ x & -y & +z & +t & +u & =2 \\ x & +y & & +2t & +u & =-1 \end{array}\right.$$

Ćwiczenie №2

$$\left\{\begin{array}{llllll} 3x & & +z & -2t & 2u & =11 \\ x & +y & +z & -t & +u & =5 \\ & 2y & +z & +t & +u & =4 \\ & & & & & \end{array}\right.$$

4x	-3y		-6t	+5u	=20
3x	+y	+z	+t	-2u	=0

Ćwiczenie №3

x	-4y	+3z	-t		=-9
x	+3y		-t	+2u	=0
2x	+3y	-2z	+t	-u	=6
x	+6y	-2z	+t	+u	=11
x		+z	-t	+u	=-4
2x	+y	+3z	-2t	+2u	=-5

Ćwiczenie №4

x	-3y	+3z	-t	-4u	=9
2x	-4y	+4z	-t	-5u	=14
	y	-3z		+4u	=-10
2x	-3y	+2z		-4u	=13
x	-2y	+z	-t	-2u	=4

Ćwiczenie №5

2x	+3y	+z	+t	+u	=8
2x	+2y	+2z	+t		=7
x	+2y	+2z	+2t	+u	=7
x	+y	+z	+2t	+u	=4
	y		+t	+u	=2

Ćwiczenie №6

x	+2y	+2z	+t		=7
x	+y	+2z	+2t	+u	=7
x		+z	+t	+u	=2
2x	+2y	+z	+t		=6
3x	+2y	+2z	+t	+u	=6
2x	+y	+3z	+3t	+2u	=9

Ćwiczenie №7

x	+y	+2z	+t	-u	=0
-x	+y		+5t	+5u	=0
2x	+y	+2z	+2t		=0
2x	+y	+4z		-4u	=0
3x	+2y	+6z	+t	-5u	=0

Ćwiczenie №8

x	+2y	+2z	+3t	-2u	=0
2x	+5y	+3z	+6t	-u	=0
x	+3y	+2z	+5t	+3u	=0
2x	+3y	+5z	+3t	-4u	=0
x	+2y	+z	+t	-4u	=0

Ćwiczenie №9

2x	+y	+3z	+2t	-u	=0
2x	+2y	+5z	+4t	-u	=0
x	+2y	+3z	+4t	-2u	=0
x	+y	+z	+2t	-2u	=0
3x	+2y	+4z	+4t	-3u	=0

Ćwiczenie №10

$$
\begin{array}{llllll}
x & +3y & -2z & +t & +3u & =0 \\
2x & +4y & -5z & +5t & +5u & =0 \\
2x & +10y & -3z & -5t & +10u & =0 \\
x & -y & -3z & +8t & -u & =0 \\
x & +y & -3z & +6t & +u & =0
\end{array}
$$

Ćwiczenie №11

$$
\left\{
\begin{array}{llllll}
2x & +3y & +2z & -2t & +u & =0 \\
x & +y & -z & -t & & =0 \\
2x & +3y & +z & & -3u & =0 \\
x & +2y & +3z & -2t & +3u & =0 \\
x & +2y & +4z & -2t & +3u & =0
\end{array}
\right.
$$

Ćwiczenie №12

$$\begin{cases} x & +3y & +3z & -4t & +2u & =0 \\ x & +y & +2z & -3t & +u & =0 \\ 3x & +y & +6z & -9t & +3u & =0 \\ x & -3y & +z & -2t & & =0 \\ 2x & -2y & +3z & -4t & +3u & =0 \end{cases}$$

11.3.2 Obliczanie wyznacznika macierzy

Algorytm obliczenia wyznacznika: przekształceniami elementarnymi sprowadzamy macierz do postaci diagonalnej (lub trójkątnej). Pamiętajmy, że przestawienie wierszy lub kolumn zmienia znak wyznacznika. Wyznacznik obliczamy jako iloczyn elementów przekątnej głównej macierzy.

Przykład. Znaleźć wyznacznik macierzy:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie.

Podczas rozwiązywania zadania działania są takie same, jak przy obliczaniu rzędu macierzy. Zademonstrujemy algorytm na podstawie tabeli.

Krok Działanie	Rezultat
Wiersz 2=wiersz 1 *1/3+wiersz 2	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Wiersz 3=wiersz 1 *-1+wiersz 3	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Wiersz 4=wiersz 1 *-2/3+wiersz 4	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$
Wiersz 3=wiersz 2 *-1+wiersz 3	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 1 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$
Wiersz 4=wiersz 2 *1+wiersz 4	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
Wiersz 4=wiersz 3 *5/2+wiersz 4	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -7/3 \end{pmatrix}$

Otrzymana macierz posiada postać trójkątną. Pomnożymy elementy przekątnej głównej: 3*-1*-2*-7/3=-14. Wyznacznik macierzy wynikowej równa się -14.

Temat „Wyznaczniki”

Zadanie: Znaleźć wyznacznik macierzy

Ćwiczenie №1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №3

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №5

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №6

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №7

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №8

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №9

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Ćwiczenie №10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №12

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №13

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №14

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №15

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

11.3.3 Macierz *odwrotna*

W celu znalezienia macierzy odwrotnej można skorzystać tą własnością, że przekształcenia elementarne, które sprowadzają macierz nieosobliwą do postaci jednostkowej, sprowadzają także macierz jednostkową do macierzy, która jest odwrotna do danej. Pracując w trybie pracy równoległej, dokonując jednocześnie przekształceń elementarnych na dwóch macierzach, pierwotnej i jednostkowej, otrzymamy z jednostkowej macierz odwrotną.

Przykład. Utworzyć macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie.

Przy pomocy przekształceń elementarnych, (patrz: Obliczanie rzędu macierzy, Obliczanie wyznacznika macierzy), sprowadzimy macierz wejściową do postaci jednostkowej, a jednostkowa stanie się jednocześnie odwrotną.

Zademonstrujemy proces przekształceń na przykładzie

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wiersz 2=wiersz 1*-3+wiersz 2;
Wiersz 3=wiersz 1*-2+wiersz 3;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wiersz 2=wiersz 2*-1/4;
Wiersz 3=wiersz 3*-1/3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

Wiersz 1=wiersz 3*-2+wiersz 1;
Wiersz 2=wiersz 3*-5/4+wiersz 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

Wiersz 1=wiersz 2*-1+wiersz 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

Macierz, którą otrzymamy z macierzy jednostkowej jest odwrotna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/12 & -1/4 & 5/12 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$A= A^{-1}=E$

W celu sprawdzenia należy pomnożyć macierz pierwotną przez odwrotną i otrzymać jednostkową.

Temat „Macierze odwrotne”

Zadanie: Znaleźć macierz odwrotną

Ćwiczenie №1

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Ćwiczenie №4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №8

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №9

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №10

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №12

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

4	4	3	-1
3	3	2	-1
2	-1	-1	1

11.3.4 Wielomian charakterystyczny operatora liniowego

Wielomian f(x) = |xE-A| nazywa się wielomianem charakterystycznym operatora liniowego φ, a równanie f(x)=0 nazywa się równaniem charakterystycznym operatora liniowego (rozdział 8).

Do znajdywania współczynników wielomianu charakterystycznego macierzy wejściowej używa się metody interpolacji. Jest ona następująca: na podstawie znanych wartości wielomianu w wybranych punktach określa się współczynniki tego wielomianu. Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać:

$f(x)=(-x)^n+c_1x^{n-1}+...+c_{n-1}x+c_n$, gdzie n – rząd wyznacznika.

Rozpatrzymy tworzenie wielomianu charakterystycznego dla macierzy stopnia 6x6. Weźmiemy punkty 2, 1, 1/2, -1/2, -1, -2, w których obliczymy wartość wyznacznika $|x_0E\text{-}A|$. Podstawimy zamiast x_0 wybrane wartości do równania:

$(-x_0)^6 + c_1x_0^5 + c_2x_0^4 + c_3x_0^3 + c_4x_0^2 + c_5x_0 + c_6 = 0.$

Otrzymamy układ równań liniowych, który w postaci macierzowej można zapisać następująco:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 & 1/16 & -1/32 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_6 \\ c_5 \\ c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(2)-64 \\ \det(1)-1 \\ \det(1/2)-1/64 \\ \det(-1/2)-1/64 \\ \det(-1)-1 \\ \det(-2)-64 \end{pmatrix}$$

lub B*X=C.

Wyznacznik tego układu nie jest równy zero, otrzymany układ ma rozwiązanie. Obliczając macierz B^{-1} oraz wykonując mnożenie B^{-1}*C, otrzymamy wektor-kolumnę, którego elementami są wymagane współczynniki wielomianu charakterystycznego.

Możemy wybrać ,zgodnie z życzeniem, swoje punkty. W ogólnym przypadku układ równań liniowych wygląda następująco:

$$\begin{pmatrix} (x_1)^0 & (x_1)^1 & (x_1)^2 & ... & (x_1)^{n-1} \\ (x_2)^0 & (x_2)^1 & (x_2)^2 & ... & (x_2)^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ (x_n)^0 & (x_n)^1 & (x_n)^2 & ... & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ ... \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(x_1)-(-x_1)^n \\ \det(x_2)-(-x_2)^n \\ .... \\ \det(x_n)-(-x_n)^n \end{pmatrix}$$

gdzie n – rząd wyznacznika, a $\det(x_i)$ = $|x_iE\text{-}A|$, i=$\overline{1,n}$

Do znajdywania pierwiastków rzeczywistych wielomianu ma zastosowanie następujące twierdzenie:

Jeżeli liczba rzeczywista jest pierwiastkiem wielomianu ze współczynnikami całkowitymi, to jej licznik jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a mianownik – dzielnikiem współczynnika przy największej potędze.

Jeśli wielomian posiada rzeczywiste współczynniki, to zanim zastosuje się to, należy pomnożyć wielomian przez najmniejszy wspólny podzielnik.

Przykład. Utworzyć Wielomian charakterystyczny i znaleźć jego pierwiastki dla macierzy operatora liniowego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie.

W celu określenia współczynników wielomianu charakterystycznego, rozwiążemy układ równań liniowych. Macierz pierwotna ma wymiar 4x4, dlatego weźmiemy punkty 2, 1, 1/2, -1/2. Dla każdej wartości obliczymy $(-x_0)^4+c_1x_0^3+c_2x_0^2+c_3x_0+c_4=0$. W postaci macierzowej układ równań liniowych można zapisać tak:

B*X=C (∗)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(2)-16 \\ \det(1)-1 \\ \det(1/2)-1/16 \\ \det(-1/2)-1/16 \end{pmatrix}$$

gdzie $\det(2)$ = |2*E-A|, $\det(1)$ = |1*E-A|, $\det(1/2)$ = |1/2*E-A|, $\det(-1/2)$ = |-1/2*E-A|.

W ten sposób, algorytm tworzenia wielomianu charakterystycznego jest następujący:

- znaleźć macierz odwrotną B^{-1};
- obliczyć wyznaczniki |2*E-A|, |1*E-A|, |1/2*E-A|, |-1/2*E-A|;
- obliczyć kolumnę C;
- pomnożyć B^{-1} przez C – będzie to kolumna wymaganych współczynników.

Znajdziemy macierz B^{-1} (patrz: Znajdywanie macierzy odwrotnej).

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/15 & -2/3 & 4/3 & 4/15 \\ -1/15 & 1/3 & 2/3 & -14/15 \\ -4/15 & 8/3 & -10/3 & 14/15 \\ 4/15 & -4/3 & 4/3 & -4/15 \end{pmatrix}.$$

W celu obliczenia wyznacznika |2*E-A|, należy utworzyć macierz (2*E-A). Otrzymaną macierz sprowadzimy do postaci diagonalnej lub trójkątnej i pomnożymy elementy diagonali (przekątnej) – to będzie wyznacznik (patrz: 10.3.3.)

$$(2*E-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Macierz ta jest równoważna macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, dlatego wyznacznik | 2*E-A |=2. Ale od niego trzeba jeszcze odjąć liczbę 16 (2^4). Otrzymany wynik będzie pierwszym z wyliczonych w wektorze-kolumnie wyrazów wolnych układu równań liniowych (∗). W naszym przykładzie otrzymano 2-16 = -14.

W taki sam sposób obliczymy |1*E-A|- 1, |1/2*E-A|-1/16, |-1/2*E-A|-1/16.

|1*E-A|- 1=0-1=-1, |1/2*E-A|-1/16=-1/16-1/16=-1/8,

|-1/2*E-A|-1/16=27/16-1/16=13/8.

Otrzymaliśmy kolumnę wyrazów wolnych C= $(-14, -1, -1.8, 13.8)^T$ układ równań liniowych (∗).

Pomnożymy B^{-1} przez otrzymaną kolumnę C.

$$\begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ -1/8 \\ 13/8 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}*C=\begin{pmatrix} 1/15 & -2/3 & 4/3 & 4/15 \\ -1/15 & 1/3 & 2/3 & -14/15 \\ -4/15 & 8/3 & -10/3 & 14/15 \\ 4/15 & -4/3 & 4/3 & -4/15 \end{pmatrix} * = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Otrzymaliśmy kolumnę współczynników wielomianu charakterystycznego.

$X=\begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c_4=0$, $c_3=-1$, $c_2=3$, $c_1=-3$.

Tym samym wielomian charakterystyczny ma postać $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$.

Znajdywanie wartości własnych operatora liniowego.

Wartości własne operatora liniowego są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego. Znajdywanie pierwiastków rzeczywistych odbywa się metodą dzielenia danego wielomianu przez wielomian pierwszej potęgi ($x-\alpha$), gdzie α - dzielnik wyrazu wolnego.

Podczas dzielenia wielomianu przez wielomian korzystamy ze schematu Gornera Горнера.

Pierwiastków wielomianu $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ będziemy szukać pośród dzielników współczynnika przy zmiennej x. Dzielniki {1,-1}.

Dla $\alpha_1=1$ otrzymamy schemat Gornera:

	3	**1**
	2	
	1	

α_1 =1 pierwiastek krotności 3.

Weźmiemy następny dzielnik–1. Dla $\alpha_2=-1$ otrzymamy schemat Gornera:

	3	**1**
1	4	8

α_2 nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Tak więc, pierwiastkami rzeczywistymi będą – {0, 1 krotności 3}.

Przykłady macierzy, które można zastosować podczas rozwiązywania tego zadania według podanych algorytmów.

B | B^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/6 & -1/6 \\ 2/3 & -2/3 & -1/2 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 1/12 & -1/12 \end{pmatrix}$$

Temat "Wielomian charakterystyczny”

Zadanie: Znaleźć wielomian charakterystyczny dla macierzy operatora liniowego.

Ćwiczenie №1

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №3

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №4

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1{,}5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №5

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0{,}5 & 1 \\ -1{,}5 & -4 & -1 & -1{,}5 \\ 3{,}5 & 8 & 1{,}5 & 3{,}5 \\ 3{,}5 & 5 & -1 & 4{,}5 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №6

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 & -6 \\ 9 & 7 & -6 & 9 \\ -18 & -10 & 14 & -18 \\ -15 & -6 & 12 & -14 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №7

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & 14 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №8

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & 8 & -2 \\ -4 & 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №10

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

-6	-7	0	-2
12	12	-1	4
10	6	-4	5

Ćwiczenie №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & 1 & 5 \\ -4 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №12

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -7 \\ 3 & 2 & -6 & 9 \\ -6 & -2 & 13 & -18 \\ -7 & -3 & 10 & -14 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №13

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2,5 & 1 & 2,5 & 0,5 \\ -2,5 & -1 & 1,5 & 1,5 \\ 9,5 & 3 & 6,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

11.3.5 Wektory własne operatora liniowego

W celu znalezienia wartości własnej operatora liniowego należy rozwiązać równanie charakterystyczne |xE-A|=0, gdzie E- macierz jednostkowa, A- macierz danego operatora.

Aby obliczyć wektor własny operatora liniowego, odpowiadający znalezionej wartości własnej, należy rozwiązać równanie Ax=sx, które można zapisać następująco: (A-s)x=0, gdzie A- macierz operatora liniowego, s- wartość własna. Równanie to jest równosilne z układem równań liniowych:

$$\begin{cases} (a_{11}-s)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & =0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-s)x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & =0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & (a_{nn}-s)x_n & =0 \end{cases}$$

Ponieważ rząd macierzy A-s jest mniejszy od n, to układ posiada niezerowe rozwiązanie. W rzeczywistości, wystarczy znaleźć fundamentalny układ rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych.

Przykład. Znaleźć wartości własne i wektory własne operatora liniowego, danego poprzez macierz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie.

Algorytmu rozwiązania:

- zestawić równanie charakterystyczne operatora liniowego;
- znaleźć pierwiastki równania charakterystycznego – to będą wartości własne operatora liniowego (patrz temat: Wielomian charakterystyczny operatora liniowego);
- dla każdej wartości własnej znaleźć współrzędne wektorów własnych tego operatora, które należą do wartości własnej;
- rozwiązać układ jednorodnych równań liniowych (patrz: Rozwiązywanie układów równań liniowych).

W przykładzie rozpatrzono macierz, dla której został już utworzony wielomian charakterystyczny oraz już znaleziono wartości własne (patrz rozdział: „Wielomian charakterystyczny operatora liniowego”).

$F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$. Pierwiastki rzeczywiste – {0, 1 krotności 3}.

Dla wartości własnej 0 zestawimy układ jednorodnych równań liniowych. (A-0*E)=0.

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Znajdziemy fundamentalny układ rozwiązań (patrz: Rozwiązanie układu równań liniowych). Rozwiązanie szczególne – to wektor (0, 0, 0, 0), rozwiązanie ogólne – (1, 0, 1, 1).

Analogicznie tworzymy układ dla wartości własnej 1 oraz znajdujemy ogólny układ rozwiązań. (A-1*E)=0

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie szczególne – to wektor (0, 0, 0, 0), rozwiązanie ogólne – (0, 0, 0, 1).
Wektory własne:
Dla wartości własnej 0 - (1, 0, 1, 1),

dla wartości własnej 1 - (0, 0, 0, 1).

Temat „Wektory własne operatora liniowego”

Zadanie: Znaleźć wartości własne oraz wektory własne dla macierzy operatora liniowego

Ćwiczenie №1

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №3

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 6 \\ 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №4

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №5

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №6

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №8

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №9

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №10

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №11

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №12

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ -6 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №13

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11.3.6 Obliczanie rzędu macierzy

Aby znaleźć rząd macierzy, należy sprowadzić ją do postaci stopniowej, posiłkując się metodą przekształceń elementarnych. Liczba niezerowych wierszy równa się rzędowi macierzy.

Przykład. Znaleźć rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie.

Pomnożymy pierwszy wiersz przez «-2» i dodamy do trzeciego wiersza, pomnożonego przez «1». W wyniku otrzymamy macierz równoważną

$$\begin{array}{c} *{-2} \\ \\ *_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Kontynuując obliczymy następującą macierz, w której wiersz 3=wiersz 2 *1+ wiersz 3 *1.

Ponieważ maksymalna liczba niezerowych wierszy macierzy równa się 3, to rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

także równa się 3.

Temat „Rząd macierzy”

Zadanie: Znaleźć rząd macierzy

Ćwiczenie №1

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №5

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №6

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №7

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №8

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

11.3.7 Macierz Jordana

Aby utworzyć macierz Jordana należy:

- utworzyć wielomian charakterystyczny macierzy A;
- znaleźć pierwiastki wielomianu charakterystycznego - wartości własne macierzy A;
- utworzyć klatki Jordana dla każdej wartości własnej wg następującego algorytmu:
  - zaznaczamy jakąkolwiek wartość własną q, następnie obliczamy rzędy następujących macierzy:
  - rząd(A-q)=r_1, rząd$(A-q)^2=r_2$,..., rząd$(A-q)^{и}=r_i$, póki $r_i=r_{i-1}$.
  - obliczamy wartość m_k: $m_1=n-r_1$,..,$m_k=n-r_k-(m_1+...+m_{k-1})$ dla k od 2 do i.
  - Jeśli wartości mk zostały znalezione, to m1 – liczba klatek Jordana, odpowiadających wartości własnej q, m1-m2 – liczba klatek Jordana stopnia 1, m2-m3 – liczba klatek Jordana stopnia 2, ..., mk-1-mk – liczba klatek Jordana stopnia k-1, gdzie k zmienia się od 2 do i.

Klatki Jordana tworzy się według schematu: (przykład)

Klatka stopnia 1	Klatka stopnia 2	Klatka stopnia 3	Klatka stopnia 4
$\begin{pmatrix} q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 \\ 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$

Następnie zaznacza się następną wartość własną i powtarza się ten algorytm od początku;

Znalezione klatki Jordana znajdują się na przekątnej (diagonali), inne elementy macierzy są równe zero.

Przykład. Utworzyć postać Jordana macierzy operatora liniowego

W przykładzie rozpatrywana jest macierz, dla której został już utworzony wielomian charakterystyczny oraz zostały znalezione wartości własne.

Wielomian charakterystyczny - $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$. Wartości własne – {0, 1}.

Zaczniemy tworzyć klatki Jordana.

Dla pierwszej wartości własnej – 0 utworzymy macierz A-0*E oraz znajdziemy jej rząd (patrz: Obliczanie rzędu macierzy). Rząd macierzy równa się 3. ($r_1=3$).

Tworzymy macierz $(A-0*E)^2$ oraz jej rząd. Wynik otrzymamy w postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 8 & -8 \\ 0 & -3 & 7 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Rząd macierzy równa się 3. ($r_2=3$).

Otrzymaliśmy, że $r_1=r_2=3$. Obliczymy $m_1=n-r_1=4-3=1$, $m_2=n-r_2-m_1=4-3-1=0$.

Liczba klatek Jordana, które odpowiadają wartości własnej 0, równa się $m_1=1$, liczba klatek Jordana stopnia 1 równa się m1- m2=1-0=1. Klatka ta ma postać **(0)**.

Powtórzymy obliczenie dla wartości własnej - 1. Utworzymy macierz A-1*E, a także $(A-1*E)^2$ oraz znajdziemy ich rzędy.

Rząd macierzy (A-1*E) równa się 3. ($r_1=3$).

$$(A-1*E)*(A-1*E)= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Rząd macierzy $(A-1*E)^2$ jest równy 3. ($r_2=2$).

Ponieważ $r_1 \neq r_2$, to dalej obliczamy macierz $(A-1*E)^3$ oraz znajdziemy jej rząd.

$$(A-1*E)^3= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Rząd macierzy jest równy 3. ($r_3=1$).

Otrzymaliśmy, że $r_3=1$ oraz $r_2 \neq r_3$, a więc należy znaleźć $(A-1*E)^4$ oraz rząd tej macierzy r_4.

$$(A-1*E)^4= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rząd macierzy jest równy 3. ($r_4=1$).

Na końcu otrzymaliśmy, że $r_4=1$и $r_3=r_4=1$.

Mamy $r_1=3$, $r_2=2$, $r_3=1$, $r_4=1$. Obliczymy:

- $m_1=n-r_1=4-3=1$,
- $m_2=n-r_2-m_1=4-2-1=1$,
- $m_3=n-r_3-m_1-m_2=4-1-1-1=1$,
- $m_4=n-r_4-m_1-m_2-m_3=4-1-1-1-1=0$.

Liczba klatek Jordana, które odpowiadają wartości własnej 1 wynosi $m_1=1$, liczba klatek Jordana stopnia 1 wynosi $m_1- m_2=1-1=0$, liczba klatek Jordana stopnia 2 równa się $m_2-m_3=1-1=0$, liczba klatek Jordana stopnia 3 równa się $m_3-m_4=1-0=1$. Klatka ta ma postać: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Klatka Jordana macierzy operatora liniowego ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temat „Postacie Jordana"

Zadanie: Utworzyć postać Jordana macierzy

Ćwiczenie №1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №4

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №6

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3/2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №7

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №9

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №10

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №11

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

11.3. 8 Ortogonalizacja układu wektorów.

Procesem ortogonalizacji nazywa się przejście z układu wektorów $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ do układu $\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, ..., \overline{b}_n\}$, który został utworzony w następujący sposób:

$\overline{b}_1 = \overline{a}_1$;

$\overline{b}_k = \overline{a}_k$ - (c_1* $\overline{b}_1$ +c_2* $\overline{b}_2$ +...+c_{k-1}* $\overline{b}_{k-1}$) dla k=1,2,...,n, gdzie

c_i =($\overline{a}_k$, $\overline{b}_i$)/($\overline{b}_i$,$\overline{b}_i$) dla i=1,2,...,k-1, jeśli $\overline{b}_i \neq 0$ oraz c_i – dowolna liczba, jeśli $\overline{b}_i$ =0.

Przykład. Utworzyć bazę ortogonalną, obejmującą układ wektorów – wiersz macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Posiłkując się powyższym schematem, mamy:

- $\overline{a}_1$= {1,2,1,2}, $\overline{b}_1$={1,2,1,2};
- $\overline{a}_2$ = {2,3,0,2}, $\overline{b}_2 = \overline{a}_2$ -c_1* $\overline{b}_1$,c_1=($\overline{a}_2$, $\overline{b}_1$)/($\overline{b}_1$, $\overline{b}_1$)
- $\overline{a}_3$= {2,1,1,3}, $\overline{b}_3 = \overline{a}_3$- c_1* $\overline{b}_1$-c_2*$\overline{b}_2$, c_1=($\overline{a}_2$, $\overline{b}_1$)/($\overline{b}_1$, $\overline{b}_1$), c_2=($\overline{a}_3$, $\overline{b}_2$)/($\overline{b}_2$, $\overline{b}_2$)

Aby dokonać tych obliczeń, należy zastosować obliczenie iloczynu skalarnego wektorów, ich dodawanie oraz odejmowanie.

Obliczymy wektor $\overline{b}_2$. Tworzymy macierz, w której pierwszy wiersz – to wektor $\overline{b}_1 = \overline{a}_1$, drugi - $\overline{a}_2$, w trzecim zapiszemy iloczyn odpowiednich elementów pierwszych dwóch wierszy. Dodamy obliczone liczby – to będzie ($\overline{a}_2$, $\overline{b}_1$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

($\overline{a}_2$, $\overline{b}_1$)=2+6+0+4=12.

Analogicznie obliczymy ($\overline{b}_1$, $\overline{b}_1$).

($\overline{b}_1$, $\overline{b}_1$)=1+4+1+4=10, c_1=12/10=6/5.

Zgodnie ze wzorem $\overline{b}_2 = \overline{a}_2$ -c_1* $\overline{b}_1$, znajdziemy ten wektor.

Pierwszy wiersz – to wektor $\overline{a}_2$, drugi - c_1* $\overline{b}_1$, w trzecim zapiszemy różnicę odpowiednich elementów pierwszych dwóch wierszy. To będą współczynniki wektora $\overline{b}_2$. $\overline{b}_2$ ={4/5, 3/5, -6/5, -2/5}.

$\overline{b}_2$ ={4/5, 3/5, -6/5, -2/5}.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 6/5 & 12/5 & 6/5 & 12/5 \\ 4/5 & 3/5 & -6/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

Analogicznie oblicza się wektor $\overline{b}_3$.

c_1=($\overline{a}_2$,$\overline{b}_1$)/($\overline{b}_1$,$\overline{b}_1$)=11/10, c_2=($\overline{a}_3$,$\overline{b}_2$)/($\overline{b}_2$,$\overline{b}_2$)= -1/13, $\overline{b}_3 = \overline{a}_3$ - c_1* $\overline{b}_1$ -c_2*$\overline{b}_2$ ={25/26,-15/13,-5/26,10/13}.

Otrzymany wynik można zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4/5 & 3/5 & -6/5 & -2/5 \\ 25/26 & -15/13 & -5/26 & 10/13 \end{pmatrix}$$

Gdzie pierwszy wiersz - $\overline{b}_1$, drugi - $\overline{b}_2$, trzeci - $\overline{b}_3$.

Aby sprawdzić, czy ta baza jest ortogonalna, można parami pomnożyć wektory tej bazy.

Temat „Ortogonalizacja układu wektorów”

Zadanie: Utworzyć bazę ortogonalną, obejmującą układ wektorów.

Ćwiczenie №1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & -2 & -5 \\ -8 & 1 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №2

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & -7 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 11 \\ -3 & 7 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №4

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie №7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

SPIS TREŚCI