О. В. ЗАТОВСЬКИЙ, В. П. ОЛЄЙНІК

Лекції з курсу

„КЛАСИЧНА МЕХАНІКА”

Частина ІІ

Рух твердого тіла
Основні принципи механіки Гамільтона
Механіка суцільних середовищ

2006

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І. І. МЕЧНИКОВА

О. В. ЗАТОВСЬКИЙ, В. П. ОЛЄЙНІК

Лекції з курсу

„КЛАСИЧНА МЕХАНІКА”

Частина II

Рух твердого тіла
Основні принципи механіки Гамільтона
Механіка суцільних середовищ

Одеса
2006

Навчальне видання

Затовський Олександр Всеволодович,
Олєйнік Вячеслав Петрович

Лекції з курсу
„КЛАСИЧНА МЕХАНІКА”

Частина II. Рух твердого тіла
Основні принципи механіки Гамільтона
Механіка суцільних середовищ

Рецензенти:
С. К. Асланов, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідуючий кафедри теоретичної механіки ОНУ;
Є.М.Кондратьєв, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри загальної фізики ОНУ.

Відповідальний редактор:
В. М. Адамян, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідуючий кафедри теоретичної фізики ОНУ.

Друкується за рішенням Вченої ради фізичного факультету Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова.
Протокол № 9 від 30 травня 2006 р.

Рух твердого тіла

У природі існує безліч тіл, які в процесі руху настільки мало змінюють свою форму та розміри, що цими змінами можна знехтувати, і вивчати закони їхнього руху у припущенні, що відстані між частинками тіл не змінюються. Такі тіла називають ***твердими***. Тверде тіло має шість ступенів вільності – три поступальні та три обертальні. Вивчення властивостей цих рухів почнемо з розгляду кінетичної енергії твердого тіла.

19. Кінетична енергія твердого тіла

Розглянемо тверде тіло як систему N точкових частинок з масами m_a, положення яких визначається радіус-векторами $\vec{r}_a(t)$, а швидкості – векторами $\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}$. Кінетична енергія такого тіла має вигляд:

$$T = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2}. \tag{19.1}$$

Оскільки тіло тверде, нескінченно мале зміщення $d\vec{r}_a$ його частинки з масою m_a складається з поступального переміщення[1] $d\vec{R}_A$ будь-якої точки A ($\vec{R}_A$ – радіус-вектор точки A, див. Рис.13) цього тіла та обертального переміщення $[d\vec{\varphi}_A, \vec{r}_a^{\,A}]$, яке залежить від радіус-вектора частинки $\vec{r}_a^{\,A}$, проведеного з точки A, та кута повороту $d\vec{\varphi}_A$ навколо точки A:

$$d\vec{r}_a = d\vec{R}_A + [d\vec{\varphi}_A, \vec{r}_a^{\,A}]. \tag{19.2}$$

Швидкість цієї частинки також має два внески:

$$\vec{v}_a = \vec{V}_A + [\vec{\Omega}_A, \vec{r}_a^{\,A}], \tag{19.3}$$

де $\vec{V}_A$ – поступальна швидкість точки A, $\vec{\Omega}_A = \dfrac{d\vec{\varphi}_A}{dt}$ – обертальна (кутова) швидкість твердого тіла навколо точки A.

[1] Це переміщення однакове для усіх частинок тіла.

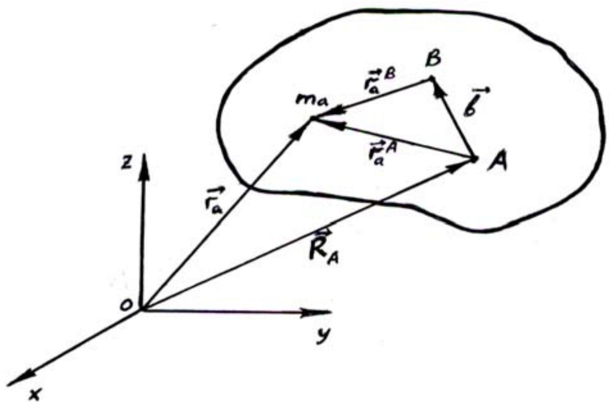

Рис. 13. Положення частинки з масою m_a
відносно початку координат $(\vec{r}_a)$, а також відносно
точок A $(\vec{r}_a^{\,A})$ та B $(\vec{r}_a^{\,B})$ твердого тіла

Підставимо (19.3) у кінетичну енергію (19.1) та винесемо в кожному із внесків за знак суми множники, які не мають індексу a:

$$T = \frac{V_A^{\,2}}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a + [\vec{V}_A, \vec{\Omega}_A]\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a^{\,A} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left\{ \Omega_A^{\,2} r_a^{A2} - (\vec{\Omega}_A \vec{r}_a^{\,A})^2 \right\}. \tag{19.4}$$

Щоб у останньому доданку винести компоненти кутової швидкості $\vec{\Omega}_A$ з-під знака суми, запишемо відповідні скалярні добутки у тензорній формі:

$$\begin{gathered} \Omega_A^{\,2} = \Omega_{Ai}\Omega_{Ai} = \Omega_{Ai}\Omega_{A\kappa}\delta_{i\kappa}, \\ \vec{\Omega}_A \vec{r}_a^{\,A} = \Omega_{Ai} x_{ai}^{A}, \\ (\vec{\Omega}_A \vec{r}_a^{\,A})^2 = \Omega_{Ai}\Omega_{A\kappa} x_{ai}^{A} x_{ak}^{A}, \end{gathered} \tag{19.5}$$

де

$$\delta_{i\kappa} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{19.6}$$

– символ Кронекера, x_{ai}^{A} – декартові компоненти радіус-вектора $\vec{r}_a^{\,A}$. У результаті остання сума виразу (19.4) матиме вигляд:

$$\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left\{ \Omega_A^{\,2} r_a^{A2} - (\vec{\Omega}_A \vec{r}_a^{\,A})^2 \right\} = \frac{1}{2}\Omega_{Ai}\Omega_{Ak}\sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} r_a^{A2} - x_{ai}^{A} x_{ak}^{A}). \tag{19.7}$$

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла складається з таких внесків:

$$T = \frac{mV_A^{\,2}}{2} + m(\vec{R}_0^{A}[\vec{V}_A, \vec{\Omega}_A]) + \frac{1}{2} I_{ik}^{A} \Omega_{Ai}\Omega_{Ak}, \tag{19.8}$$

де $m = \sum_{a=1}^{N} m_a$ – повна маса твердого тіла, $\vec{R}_0^A = \frac{1}{m}\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a^{\,A}$ – радіус-вектор центру мас тіла відносно точки A,

$$I_{ik}^A = \sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} {r_a^A}^2 - x_{ai}^A x_{ak}^A) \tag{19.9}$$

– ***тензор моментів інерції*** твердого тіла відносно точки A. Перший внесок у співвідношенні (19.8) характеризує кінетичну енергію поступального руху твердого тіла (поступального руху точки A, де немовби знаходиться уся маса m твердого тіла). Другий внесок характеризує рух центру мас тіла відносно точки A, останній – кінетичну енергію обертального руху твердого тіла навколо точки A. Якщо другий внесок дорівнює нулю, кінетична енергія твердого тіла матиме вигляд:

$$T = \frac{m {V_A}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k \,, \tag{19.10}$$

де внески поступальних та обертальних рухів повністю відокремлені один від одного. Окрім тривіальних випадків $\vec{V}_A = 0$ (нема поступального руху) або $\vec{\Omega}_A = 0$ (нема обертального руху), другий внесок дорівнюватиме нулю у випадках:

а) вектор $\vec{R}_0^A = 0$, тобто розглядається обертання твердого тіла навколо центру мас;

б) якісь два з векторів $\vec{R}_0^A$, $\vec{V}_A$, $\vec{\Omega}_A$ паралельні один одному.

Якщо розглядати рух твердого тіла як поступальний рух якоїсь іншої точки твердого тіла (напр., точки B – див. Рис.13) та обертальний рух тіла навколо цієї точки, швидкість частинки з масою m_a матиме внески, аналогічні (19.3):

$$\vec{v}_a = \vec{V}_B + [\vec{\Omega}_B, \vec{r}_a^{\,B}], \tag{19.11}$$

де $\vec{V}_B$ – поступальна швидкість точки B. З іншого боку, оскільки $\vec{r}_a^{\,A} = \vec{r}_a^{\,B} + \vec{b}$, з (19.3) випливає:

$$\vec{v}_a = \vec{V}_a + [\vec{\Omega}_A, \vec{r}_a^{\,B}] + [\vec{\Omega}_A, \vec{b}], \tag{19.12}$$

тобто

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + [\vec{\Omega}_B, \vec{b}], \tag{19.13}$$

$$\vec{\Omega}_B = \vec{\Omega}_A = \vec{\Omega}. \tag{19.14}$$

Останнє співвідношення вказує, що ***обертальна швидкість усіх точок твердого тіла однакова і не залежить від вибору системи***

відліку, жорстко пов'язаної з твердим тілом. Відмітимо, що точку B можна вибрати таким чином, щоб $\vec{V}_B = 0$. У такій системі відліку рух твердого тіла є обертанням навколо вісі, що проходить через точку B. Цю вісь називають ***миттєвою віссю обертання*** твердого тіла. Швидкість частинок перпендикулярна миттєвій вісі обертання:

$$\vec{v}_a = [\vec{\Omega}, \vec{r}_a]. \tag{19.15}$$

Як випливає з (19.13), (19.14),

$$(\vec{\Omega}\vec{V}_B) - (\vec{\Omega}\vec{V}_A) = (\vec{\Omega}[\vec{\Omega}, \vec{b}]) = (\vec{b}[\vec{\Omega}, \vec{\Omega}]) = 0, \tag{19.16}$$

тобто скалярний добуток

$$(\vec{\Omega}\vec{V}_B) = (\vec{\Omega}\vec{V}_A) \tag{19.17}$$

є ***інваріант руху твердого тіла***. У випадку, коли кутова швидкість $\vec{\Omega}$ перпендикулярна поступальній швидкості $\vec{V}_A$ якоїсь точки A твердого тіла, вона перпендикулярна поступальній швидкості будь-якої його точки.

Задача 19.1. Знайти рівняння Ейлера-Лагранжа та інтеграли руху вільного твердого тіла у лабораторній системі відліку.

20. Тензор моментів інерції

Кінетична енергія обертального руху твердого тіла визначається формулою:

$$T_{оберт} = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k, \tag{20.1}$$

де I_{ik} – тензор моментів інерції. Якщо тверде тіло – це система матеріальних точок з масами m_a, його тензор моментів інерції є сумою внесків усіх матеріальних точок системи:

$$I_{ik} = \sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} r_a^{\,2} - x_{ai} x_{ak}), \tag{20.2}$$

але якщо тверде тіло розглядається як суцільне з об'ємною густиною ρ, у цьому виразі треба замінити суму на об'ємний інтеграл, маси частинок m_a – на густину тіла ρ, а радіус-вектор $\vec{r}_a$ та його компоненти треба записати без індексу a:

$$I_{ik} = \int\limits_V \rho(\delta_{ik} r^2 - x_i x_k) dV\,. \qquad (20.3)$$

Для суцільного твердого тіла, яке є нескінченно тонкою поверхнею Σ з поверхневою густиною ρ_Σ, компоненти тензора моментів інерції розраховуються за формулою:

$$I_{ik} = \int\limits_\Sigma \rho_\Sigma (\delta_{ik} r^2 - x_i x_k) ds\,. \qquad (20.4)$$

Аналогічно, для суцільного твердого тіла, яке є нескінченно тонкою лінією L з лінійною густиною ρ_L, компоненти тензора моментів інерції розраховуються за формулою:

$$I_{ik} = \int\limits_L \rho_L (\delta_{ik} r^2 - x_i x_k) dl\,. \qquad (20.5)$$

У формулах (20.3)-(20.5) радіус-вектор $\vec{r}$ та його декартові компоненти x_i визначають положення будь-якої точки, відповідно, об'єму V, поверхні Σ або лінії L.

У загальному випадку компоненти тензора I_{ik} можна записати у вигляді матриці

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}. \qquad (20.6)$$

Оскільки символ Кронекера δ_{ik} (19.6) симетричний:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}\,, \qquad (20.7)$$

з (20.2)-(20.5) випливає, що тензор моментів інерції твердого тіла також симетричний:

$$I_{ik} = I_{ki}\,, \qquad (20.8)$$

тобто з дев'яти компонент у (20.6) незалежних тільки шість. Для твердого тіла як системи матеріальних точок з (20.2) походить, що незалежні компоненти I_{ik} мають вигляд:

$$I_{11} = \sum_{a=1}^{N} m_a ({y_a}^2 + {z_a}^2)\,, \quad I_{22} = \sum_{a=1}^{N} m_a ({x_a}^2 + {z_a}^2)\,,$$

$$I_{33} = \sum_{a=1}^{N} m_a ({x_a}^2 + {y_a}^2)\,, \quad I_{12} = I_{21} = -\sum_{a=1}^{N} m_a x_a y_a\,, \qquad (20.9)$$

$$I_{13} = I_{31} = -\sum_{a=1}^{N} m_a x_a z_a\,, \quad I_{23} = I_{32} = -\sum_{a=1}^{N} m_a y_a z_a\,.$$

Незалежні компоненти тензора моментів інерції суцільного твердого тіла визначаються аналогічно (у вигляді інтегралів (20.3), (20.4) або (20.5) – у відповідності з тим, чи це тіло об’ємне, поверхневе або лінійне).

Однак незалежних компонент у тензора моментів інерції тільки три: за допомогою координатних перетворень у ньому можна привести до нульових значень ще три недіагональні функції[2], тобто можна знайти такий клас систем відліку, де тензор I_{ik} має діагональний вигляд:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \qquad (20.10)$$

Декартова система координат, де тензор I_{ik} набуває вигляду (20.10), називається ***системою головних моментів інерції***, а I_1, I_2, I_3 – ***головними моментами інерції*** твердого тіла. Координатні вісі цієї системи називають ***головними осями інерції*** твердого тіла.

Тверде тіло, тензор моментів інерції якого має вигляд (20.10), називається ***дзигою***. Оскільки у тривимірному просторі до такої форми завжди можливо привести симетричний тензор другого рангу, можна твердити, що ***будь-яке тверде тіло – це дзига***.

У залежності від співвідношень між головними моментами виділяють випадки:

$$I_1 = I_2 = I_3 \qquad (20.11)$$

– ***кульова дзига*** (напр., кулька з однорідного матеріалу);

$$I_1 = I_2 \neq I_3 \qquad (20.12)$$

– ***симетрична дзига*** (напр., прямий циліндр з однорідного матеріалу, вісь якого – вісь z);

$$I_1 = I_2 \neq 0, \quad I_3 = 0 \qquad (20.13)$$

– ***жорсткий ротатор*** (напр., лінійна молекула вздовж вісі z);

---

[2] З точки зору лінійної алгебри вираз (20.1) представляє собою додатно визначену квадратичну форму, оскільки I_{11}, I_{22}, I_{33}, як це видно з (20.9), не можуть бути від’ємними величинами. Таку квадратичну форму завжди у будь-якій точці простору поворотами у трьох ортогональних площинах можна привести до діагонального вигляду. У загальному випадку ці повороти у кожній точці простору різні. Оскільки простір тривимірний, координатні перетворення у просторі – це перетворення за допомогою трьох незалежних функцій. Тому завжди можна привести цю квадратичну форму до діагонального вигляду не тільки у будь-якій точці простору, але й у просторі у цілому, тобто завжди можна знайти систему відліку, де тензор I_{ik} має діагональний вигляд.

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3 \tag{20.14}$$

– ***асиметрична дзига*** (будь-яке тривимірне тіло у системі головних осей інерції).

З (20.9) випливає, що сума будь-яких двох головних моментів не може бути меншою за третій головний момент:

$$I_1 + I_2 \geq I_3; \quad I_2 + I_3 \geq I_1; \quad I_3 + I_1 \geq I_2. \tag{20.15}$$

Відмітимо, що співвідношення між головними моментами інерції твердого тіла (20.11)-(20.15) відбивають його властивості симетрії. Головні вісі інерції кульової дзиги можуть бути направлені як завгодно (але це завжди три взаємно перпендикулярні вісі). Якщо тіло має вісь симетрії, одна з головних осей інерції співпадає з нею, а дві інші лежать у перпендикулярній площині. У тіла, що має площину симетрії, дві головні вісі інерції знаходяться у цій площині, а третя перпендикулярна до них. Жорсткий ротатор – це низка точкових частинок, які знаходяться на фіксованих відстанях одна від одної вздовж прямої лінії, і не можна казати про обертання частинок навколо цієї лінії. Тому жорсткий ротатор – це система з двома обертальними ступенями вільності. Для системи частинок, які знаходяться у одній площині, сума головних моментів відносно осей у цій площині дорівнює головному моменту відносно третьої вісі (яка перпендикулярна площині):

$$I_1 + I_2 = I_3. \tag{20.16}$$

Розглянемо тепер, яким чином перетворюються компоненти тензора моментів інерції при координатних перетвореннях. З тензорного аналізу відомо, що при переході від координат x_1, x_2, x_3 до координат $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ компоненти будь-якого тензорного поля другого рангу $A_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ перетворюються за законом :

$$\begin{aligned}&\tilde{A}_{ik}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \\ &= \frac{\partial x_m}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_k} A_{mn}(x_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), x_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), x_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)) \ ,\end{aligned} \tag{20.17}$$

де по індексах, що попарно повторюються, здійснюється підсумування від 1 до 3, хоча знак суми не пишеться (правило підсумовування Ейнштейна). У загальному вигляді застосування цієї формули призводить до занадто громіздких виразів, оскільки, по-перше, кожна компонента тензора $\tilde{A}_{ik}$ у нових координатах є лінійною комбінацією усіх компонент тензора A_{ik} у старих координатах. Це означає, що $\widetilde{A}_{ik}$ може складатися з декількох доданків (не більше, як з дев'яти), бо у формулі (20.17) стоїть подвійна сума. По-друге, у компоненті A_{mn} кожного з цих доданків треба замінити значення старої координати на нову. З співвідношення (20.17) випливає, що після координатних перетворень компоненти тензора моментів інерції можуть стати функціями координат, що значно ускладнює рівняння руху твердого тіла.

Формула (20.17) істотно спрощується у випадку паралельного перенесення початку координат. Якщо початок декартової системи координат паралельно перенести на вектор $\vec{b}$, радіус-вектор $\vec{r}$ будь-якої точки перетвориться на вектор $\vec{r}\,'$:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{b}\,. \tag{20.18}$$

Відповідно, i-та декартова компонента цього вектора:

$$x_i = x_i' + b_i\,. \tag{20.19}$$

Похідні старих координат за новими $\dfrac{\partial x_m}{\partial x_i'}$ у формулі (20.17) – це просто символи Кронекера (19.6):

$$\frac{\partial x_m}{\partial x_i'} = \delta_{mi}\,. \tag{20.20}$$

У результаті формула (20.17) стає подібною до перетворень скалярних функцій: кожна компонента $\widetilde{A}_{ik}$ зв'язується лише з такою ж компонентою A_{ik}, і треба тільки підставити у аргументи A_{ik} зв'язок між старими і новими координатами.

Для тензора моментів інерції (20.2) перетворення (20.18), (20.19) приводить до виразу:

$$I_{ik}' = \sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} r_a'^2 - x_{ai}' x_{ak}') = \sum_{a=1}^{N} m_a (\delta_{ik} (\vec{r}_a - \vec{b})^2 - (x_{ai} - b_i)(x_{ak} - b_k))$$

Після перегруповування внесків з урахуванням положення центру мас тіла $\vec{R} = \dfrac{1}{m}\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a$ (або для декартових компонент: $R_i = \dfrac{1}{m}\sum_{a=1}^{N} m_a x_{ai}$) знаходимо:

$$I_{ik}' = I_{ik} - m(2\delta_{ik}\vec{b}\vec{R} - R_i b_k - b_i R_k) + m(\delta_{ik} b^2 - b_i b_k)\,. \tag{20.21}$$

Якщо первісна система координат є системою центру мас $(\vec{R} = 0)$, формула (20.21) спрощується:

$$I'_{ik} = I_{ik} + m(\delta_{ik} b^2 - b_i b_k)\,. \qquad (20.22)$$

У випадку, коли паралельне перенесення відбувається з центру мас вздовж якоїсь головної вісі інерції (напр., вісі x_1), два інші головні моменти тіла набувають доданок mb^2:

$$I'_a = I_a + mb^2\,, \quad a = 2,3\,. \qquad (20.23)$$

Останнє співвідношення виражає добре відому ***теорему Штейнера***: момент інерції відносно довільної вісі дорівнює сумі моменту інерції відносно паралельної вісі, яка проходить через центр інерції, та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

Задача 20.1. Знайти головні моменти інерції молекули води.

Задача 20.2. Знайти головні моменти інерції (у системі центру мас) однорідного прямого кругового циліндра радіусу R, довжини l, у якому вирізаний циліндричний отвір радіусу $\frac{R}{4}$. Вісь цього отвору паралельна вісі циліндра і знаходиться на відстані $\frac{R}{4}$ від неї. Маса циліндра з отвором m.

При обчисленні головних моментів інерції суцільного тіла з отвором можна скористатися адитивністю тензора моментів інерції та обчислювати його компоненти для фіктивної системи двох тіл: суцільного тіла без отвору та тіла з відповідною від'ємною масою, що знаходиться на місці отвору.

21. Рівняння руху твердого тіла

Оскільки тверде тіло – це система жорстко зв'язаних матеріальних точок, рух цієї системи повинен описуватися набором шести рівнянь. Такі рівняння можна отримати, розглядаючи швидкість зміни імпульсу $\frac{d\vec{P}}{dt}$ та швидкість зміни моменту імпульсу $\frac{d\vec{M}}{dt}$ твердого тіла.

Повний імпульс твердого тіла $\vec{P}$ – це сума імпульсів $\vec{p}_a$ окремих частинок тіла:

$$\vec{P}=\sum_{a=1}^{N}\vec{p}_a=\sum_{a=1}^{N}m_a\vec{v}_a\,. \qquad (21.1)$$

Для кожної частинки тіла виконується другий закон Ньютона:

$$\dot{\vec{p}}_a=\vec{F}_a\,, \qquad (21.2)$$

де $\vec{F}_a$ – сила, яка діє на частинку з номером a. Похідна за часом від повного імпульсу

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_{a=1}^{N}\dot{\vec{p}}_a=\sum_{a}\vec{F}_a\,. \qquad (21.3)$$

Внаслідок жорстких зв'язків внутрішні сили взаємодії між частинками взаємно компенсують одна одну, і повна сила, що діє на тверде тіло, – це зовнішня сила $\vec{F}$:

$$\vec{F}=\sum_{a}\vec{F}_a\,. \qquad (21.4)$$

У результаті маємо рівняння для поступального руху твердого тіла

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}\,. \qquad (21.5)$$

Рівняння (21.5) визначає зміну імпульсу твердого тіла під впливом зовнішніх сил. Відмітимо, що повний імпульс вільного твердого тіла, як замкненої системи, не повинен змінюватися − див. п.4 (внутрішні сили між частинками твердого тіла повинні повністю компенсувати одна одну).

Швидкість зміни повного моменту імпульсу $\vec{M}$ твердого тіла:

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}[\vec{r}_a,\vec{p}_a]=\sum_{a=1}^{N}\left([\dot{\vec{r}}_a,\vec{p}_a]+[\vec{r}_a,\dot{\vec{p}}_a]\right). \qquad (21.6)$$

Оскільки $\dot{\vec{r}}_a=\vec{v}_a$, $\vec{p}_a=m_a\vec{v}_a$, перший внесок у дужках відсутній. У другий внесок підставимо (21.2), і для похідної за часом від повного моменту імпульсу знаходимо:

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\vec{K}\,, \qquad (21.7)$$

де

$$\vec{K}=\sum_{a=1}^{N}[\vec{r}_a,\vec{F}_a] \qquad (21.8)$$

– момент сил, що діє на тверде тіло (це сума моментів сил, діючих на окремі частинки тіла). Рівняння (21.7) визначає зміну моменту імпульсу твердого тіла під впливом моментів сил, що діють на кожну частинку тіла. Це рівняння описує обертання твердого тіла відносно миттєвої вісі, що проходить через точку O', відносно якої визначений момент імпульсу $\vec{M}$.

При паралельному перенесенні початку координат на вектор $\vec{b}$ (20.18) момент сил перетворюється за законом:

$$\vec{K} = \vec{K}' + [\vec{b}, \vec{F}]. \qquad (21.9)$$

З цього співвідношення випливає, що момент сил, що діє на тверде тіло, не змінюється у таких випадках:

– повна сила $\vec{F}$, що діє на тверде тіло, дорівнює нулю;

– повна сила $\vec{F}$, що діє на тверде тіло, дорівнює нулю ($\vec{F} = 0$), але на тіло діє пара сил, (дві рівні по модулю протилежно направлені сили, які не діють вздовж однієї прямої);

– вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{F}$.

Якщо вектори $\vec{K}$ і $\vec{F}$ взаємно перпендикулярні, завжди можна знайти систему відліку, де

$$\vec{K} = [\vec{b}, \vec{F}]. \qquad (21.10)$$

Таких систем відліку нескінченно багато, оскільки від (21.10) можна перейти до нової системи паралельним переносом на вектор $\vec{b}'$, будь-який за модулем, але направлений вздовж вектора $\vec{F}$. Тобто, якщо $\vec{K} \perp \vec{F}$, дія усіх сил на тверде тіло – це просто сила $\vec{F}$, що діє вздовж якоїсь прямої лінії.

Рівняння (21.5), (21.7) – це повна система рівнянь, що описують рух твердого тіла. У загальному випадку ці рівняння мають дуже складну структуру, і далеко не завжди можуть бути знайдені відповідні аналітичні розв'язки. Для розв'язання конкретних задач необхідно виразити момент імпульсу $\vec{M}$ у (21.7) через кутову швидкість $\vec{\Omega}$, а момент сил $\vec{K}$ – через кути поворотів твердого тіла $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ навколо точки O'.

У рамках механіки Лагранжа рух твердого тіла можна описати лагранжианом:

$$L = \frac{mV^2}{2} + m(\vec{R}_0[\vec{V}, \vec{\Omega}]) + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U(\vec{R}, \vec{\varphi}), \qquad (21.11)$$

де $\vec{R}$ – радіус-вектор точки O' твердого тіла, відносно якої визначений момент імпульсу $\vec{M}$, і рух якої визначає поступальний рух твердого тіла; $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ – швидкість цієї точки; $\vec{R}_0$ – радіус-вектор центру мас тіла відносно точки O'; $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ – кути поворотів твердого тіла навколо точки O'; I_{ik} – тензор моментів інерції твердого тіла відносно точки O'; $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\varphi}}$ – кутова швидкість твердого тіла; $U(\vec{R}, \vec{\varphi})$ – потенціальна енергія твердого тіла. Оскільки відстані між частинками твердого тіла не змінюються, $U(\vec{R}, \vec{\varphi})$ є потенціальною енергію твердого тіла у зовнішніх полях. Узагальненими координатами функції Лагранжа (21.10) є $\vec{R}, \vec{\varphi}$, узагальненими швидкостями – $\vec{V}, \vec{\Omega}$. Рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = 0 \qquad (21.12)$$

для функції (21.10) є рівняннями руху твердого тіла (21.5), (21.7). Відмітимо, що перевагою метода Лагранжа у порівнянні з підходом Ньютона є те, що рівняння (21.12) можна переписати у будь-яких узагальнених координатах q_a $(a = 1,...,6)$ (зробивши відповідну заміну змінних у функції Лагранжа (21.11)), і метою координатних перетворень є знаходження таких узагальнених координат, у яких рівняння руху твердого тіла можуть бути розв’язані.

Задача 21.1. Знайти функцію Лагранжа та рівняння руху однорідної кульки радіусу R_1, яка котиться у полі сил тяжіння по внутрішній поверхні горизонтальної труби радіусу R_2.

22. Рівняння Ейлера для твердого тіла

Частково структура рівнянь (21.5), (21.7) спрощується, якщо ввести рухому систему відліку, початок координат якої співпадає з центром мас твердого тіла, або систему відліку, у якій тверде тіло має нерухому точку. У таких системах відліку момент імпульсу твердого тіла $\vec{M}$ пов'язаний тільки з кутовою швидкістю тіла $\vec{\Omega}$:

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^{N} m_a [\vec{r}_a, \vec{V}_a] = \sum_{a=1}^{N} m_a [\vec{r}_a, [\vec{\Omega}, \vec{r}_a]] = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{\Omega} r_a^2 - \vec{r}_a \left(\vec{r}_a \vec{\Omega}\right)\right). \qquad (22.1)$$

У тензорних позначеннях цей вираз має вигляд:

$$M_i = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\Omega_i r_a^2 - x_{ai} x_{ak} \Omega_k\right). \qquad (22.2)$$

З урахуванням властивостей символу Кронекера (19.6):

$$\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k, \qquad (22.3)$$

кутову швидкість Ω_k у формулі (22.2) можна винести за знак суми і скористатися співвідношенням (20.2) для тензора моментів інерції I_{ik}, тобто

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \tag{22.4}$$

Компоненти моменту імпульсу твердого тіла $\vec{M}$ у такій системі відліку лінійно пов'язані з компонентами кутової швидкості $\vec{\Omega}$, але самі ці вектори можуть бути направлені відносно один одного як завгодно. Тільки у випадку, коли рухома система відліку, що пов'язана з центром мас твердого тіла, є системою головних моментів інерції, кожна з компонент моменту імпульсу пропорційна лише відповідній компоненті кутової швидкості:

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3, \tag{22.5}$$

і тільки для кульової дзиги (20.11) або жорсткого ротатора (20.13) вектори $\vec{M}$ та $\vec{\Omega}$ колінеарні.

Як було показано у п.20, серед систем відліку, жорстко пов'язаних з твердим тілом, тензор моментів інерції твердого тіла має найпростіший вигляд у системі головних вісей. Тому для опису руху твердого тіла доцільно ввести рухому систему відліку, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$. У такій системі відліку приріст будь-якого вектора $\vec{b}$ за рахунок повороту системи відліку на кут $\delta\vec{\varphi}$ навколо довільної вісі можна записати у вигляді

$$\delta\vec{b} = [\delta\vec{\varphi}, \vec{b}] \tag{22.6}$$

аналогічно приросту радіус-вектора $\vec{r}_a$ ($\delta\vec{r}_a = [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a]$) або швидкості $\vec{v}_a$ ($\delta\vec{v}_a = [\delta\vec{\varphi}, \vec{v}_a]$) будь-якої частинки з номером a (див. (4.10)). Похідна за часом $\dfrac{d\vec{b}}{dt}$ при переході до такої системи відліку складатиметься з внеску похідної $\dfrac{d'\vec{b}}{dt}$, що відповідає за зміну вектора $\vec{b}$ у рухомій системі відліку, та внеску $[\vec{\Omega}, \vec{b}]$, зумовленому обертанням системи відліку з кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\varphi}}$:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d'\vec{b}}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{b}]. \tag{22.7}$$

Рівняння руху (21.5), (21.7) після переходу у рухому систему відліку мають вигляд:

$$\frac{d'\vec{P}}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{P}] = \vec{F}', \tag{22.8}$$

$$\frac{d'\vec{M}}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{M}] = \vec{K}', \qquad (22.9)$$

де вектори $\vec{F}'$ і $\vec{K}'$ визначені відносно рухомої системи відліку.

Оскільки повний імпульс твердого тіла $\vec{P}$ пов'язаний зі швидкістю поступального руху $\vec{V}$ співвідношенням

$$\vec{P} = m\vec{V}, \qquad (22.10)$$

де m – повна маса тіла, у декартових координатах x_1, x_2, x_3 рухомої системи відліку рівняння (22.8) мають вигляд:

$$\begin{aligned} m\frac{d'V_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 = F_1', \\ m\frac{d'V_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 = F_2', \\ m\frac{d'V_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 = F_3'. \end{aligned} \qquad (22.11)$$

Якщо рухома система відліку є системою головних моментів інерції (де виконуються співвідношення (22.5)), рівняння (22.9) у декартових змінних набувають вигляду:

$$\begin{aligned} I_1\frac{d'\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1', \\ I_2\frac{d'\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 = K_2', \\ I_3\frac{d'\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3'. \end{aligned} \qquad (22.12)$$

Ці рівняння називаються ***рівняннями Ейлера***. Підкреслимо, що декартові компоненти усіх векторів у рівняннях (22.11), (22.12) визначені відносно вісей x_1, x_2, x_3 рухомої системи відліку.

Рівняння (22.12) істотно спрощуються для кульової дзиги (20.11) та жорсткого ротатора (20.13):

$$I\frac{d'\vec{\Omega}}{dt} = \vec{K}' \qquad (22.13)$$

(для жорсткого ротатора з віссю x_3 вектори $\vec{\Omega}$ і $\vec{K}'$ визначені у площині, перпендикулярній вісі x_3).

Система рівнянь (22.11)-(22.12) є замкненою системою шести рівнянь для шести невідомих функцій – компонент векторів $\vec{V}$ та $\vec{\Omega}$. Якщо цю систему вдасться розв'язати, отримаємо ці компоненти як певні функції часу t. Щоб знайти траєкторію руху твердого тіла у нерухомій системі відліку, достатньо виразити компоненти векторів $\vec{V}$ та $\vec{\Omega}$ через первинні координати $\vec{r}$, $\vec{\varphi}$ та відповідні швидкості $\dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{\varphi}}$. Підставивши у ці співвідношення

$\vec{V} = \vec{V}(t)$ та $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$, будемо мати шість диференціальних рівнянь першого порядку для знаходження траєкторії руху твердого тіла $r = r(t)$, $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$ у нерухомій системі відліку.

Для твердого тіла з однією нерухомою точкою треба шукати розв'язки системи рівнянь (22.12). Ця система може бути приведена до квадратур при довільних значеннях інтегралів руху у таких випадках:

– точка опори тіла знаходиться у центрі мас і тому $K_1' = K_2' = K_3' = 0$; головні моменти інерції твердого тіла у цьому випадку можуть бути довільними (асиметрична дзига (20.14));

– точка опори тіла не співпадає з центром мас та лежить на вісі симетрії (напр., вісь x_3), відносно якої два головні моменти інерції співпадають (симетрична дзига (20.12)):

$$I_1 = I_2 \neq I_3;$$

– центр мас лежить у площині, яка проходить через точку опори перпендикулярно вісі симетрії; між головними моментами інерції виконується співвідношення

$$I_1 = I_2 = 2I_3 \qquad (22.14)$$

(дзига С.Ковалевської).

Задача 22.1. Знайти траєкторію руху асиметричної дзиги з нерухомим центром мас.

Задача 22.2. Знайти траєкторію руху симетричної дзиги у полі сил тяжіння (сил ваги), коли її точка опори не співпадає з центром мас та лежить на вісі симетрії. Зокрема проаналізувати такі випадки: а) вільна дзига (прискорення сили ваги дорівнює нулю); б) спляча дзига (сила тяжіння діє вздовж вісі симетрії, центр мас дзиги знаходиться вище точки опори); в) швидка дзига (кінетична енергія дзиги значно більше потенціальної).

Задача 22.3. Розглянути рух дзиги С.Ковалевської.

23. Кути Ейлера

Кути обертання твердого тіла навколо якоїсь точки простору, жорстко пов'язаної з тілом, можна вибирати як завгодно. Треба тільки щоб таких кутів було три, оскільки обертання твердого тіла відбуваються у тривимірному просторі. З точки зору розв'язання рівнянь руху твердого тіла інколи зручно використовувати ***кути Ейлера*** ϑ, φ, ψ .

Побудуємо дві системи координат з початком у точці O – нерухомій точці твердого тіла. Одна з цих систем координат з вісями x, y, z – нерухома, а друга з вісями x_1, x_2, x_3 обертається навколо точки O (Рис.14) так само, як тверде тіло. Площина, у якій лежать вісі x_1, x_2 (площина x_1x_2), перетинається з площиною xy нерухомої системи координат вздовж лінії ON, яка називається ***лінією вузлів***. Положення рухомої системи координат відносно нерухомої повністю описується такими кутами: ϑ – це кут між вісями z та x_3; φ – кут між віссю x та лінією вузлів ON у площині xy; ψ – кут між лінією вузлів ON та віссю x_1 у площині x_1x_2. Для

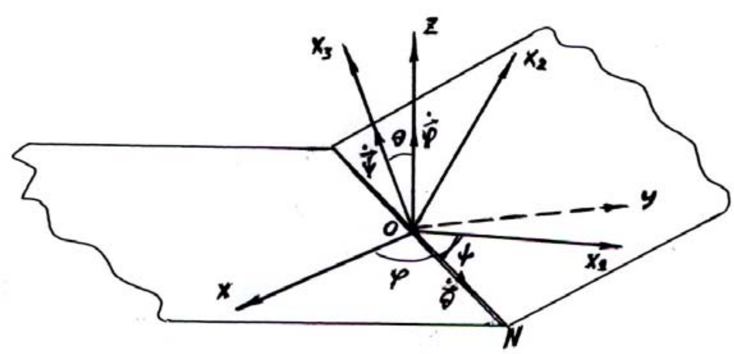

Рис. 14. Кути Ейлера ϑ, φ, ψ

та відповідні кутові швидкості $\dot{\vec{\vartheta}}, \dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{\psi}}$

того, щоб будь-який реальний поворот твердого тіла однозначно визначався кутами ϑ, φ, ψ, вони повинні змінюватися у таких межах:

$$0 \le \psi \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \vartheta \le \pi. \qquad (23.1)$$

Якщо вісь x_3 співпадає з віссю власного обертання дзиги, зміна кута ψ відповідає її власному обертанню, зміна кута φ відповідає повороту вертикальної площини, що проходить через вісі z та x_3 (прецесія дзиги); зміна кута ϑ - нутації дзиги. Відповідно, кут ψ називають ***кутом власного обертання***, φ – ***кутом прецесії***, ϑ – ***кутом нутації***. Рух дзиги, при якому кут ϑ не змінюється, називається ***регулярною прецесією***. Якщо кут ϑ змінюється, вісь дзиги, як правило, здійснює малі коливання навколо якогось положення рівноваги. Це і є ***нутація дзиги***.

Швидкості зміни цих кутів є вектори, котрі перпендикулярні площинам, у яких змінюється кут. Відповідно, вектор $\dot{\vec{\psi}}$ направлений вздовж вісі x_3 (модуль цього вектора дорівнює $\dot{\psi}$), вектор $\dot{\vec{\varphi}}$ направлений вздовж вісі z, а вектор $\dot{\vec{\vartheta}}$ – вздовж лінії вузлів ON. Оскільки кути $\dot{\vec{\vartheta}}, \dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{\psi}}$ повністю описують будь-який поворот твердого тіла у просторі, для повної кутової швидкості виконується співвідношення:

$$\vec{\Omega} = \dot{\vec{\vartheta}} + \dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\psi}} . \tag{23.2}$$

Вектори $\dot{\vec{\vartheta}}, \dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{\psi}}$ мають такі проекції на вісі x_1, x_2, x_3 рухомої системи відліку:

$$\left(\dot{\vec{\psi}}\right)_1 = \left(\dot{\vec{\psi}}\right)_2 = 0, \quad \left(\dot{\vec{\psi}}\right)_3 = \dot{\psi} , \tag{23.3}$$

$$\left(\dot{\vec{\varphi}}\right)_1 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi , \quad \left(\dot{\vec{\varphi}}\right)_2 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi , \quad \left(\dot{\vec{\varphi}}\right)_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta , \tag{23.4}$$

$$\left(\dot{\vec{\vartheta}}\right)_1 = \dot{\vartheta}\cos\psi , \quad \left(\dot{\vec{\vartheta}}\right)_2 = -\dot{\vartheta}\sin\psi , \quad \left(\dot{\vec{\vartheta}}\right)_3 = 0. \tag{23.5}$$

Підставляючи ці співвідношення у (23.2), знаходимо:

$$\begin{gathered} \Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi , \\ \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi , \\ \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} . \end{gathered} \tag{23.6}$$

Якщо рухома система відліку є системою головних моментів інерції, кінетична енергія обертального руху асиметричної дзиги у кутах Ейлера матиме вигляд:

$$\begin{gathered} T_{оберт} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi\right)^2 + \\ + \frac{I_2}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi\right)^2 + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2 . \end{gathered} \tag{23.7}$$

24. Рух симетричної дзиги

Як приклад руху твердого тіла розглянемо рух вільної симетричної дзиги, для якої $I_1 = I_2 \neq I_3$ – див. (20.12). Оскільки вільна симетрична дзига – це замкнена система, для неї виконуються закони збереження енергії E, імпульсу $\vec{P}$ та моменту імпульсу $\vec{M}$.

Закон збереження енергії $E = const$ означає, що у процесі руху залишається незмінною повна кінетична енергія дзиги. Якщо розглядати рух дзиги як поступальний рух її центру мас та обертальний рух навколо центру мас, кінетична енергія дзиги матиме внески (19.10):

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_1}{2}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) + \frac{I_3}{2}\Omega_3^2, \qquad (24.1)$$

де $\vec{V}_c$ – поступальна швидкість центру мас дзиги, головні моменти I_1, I_3 визначені відносно центру мас. Із закону збереження імпульсу $\vec{P} = const$ випливає, що центр мас дзиги рухається з постійною швидкістю $\vec{V}_c = const$. Якщо центр мас дзиги покоїться, з закону збереження моменту $\vec{M} = const$ знаходимо декілька висновків відносно кутової швидкості $\vec{\Omega}$.

Нехай вісь симетрії дзиги x_3 знаходиться під кутом ϑ до вектора $\vec{M}$. Оскільки вісі x_1 та x_2 у площині, перпендикулярній x_3, можуть бути направлені як завгодно, розмістимо вісь x_1 у площині, де знаходяться вектор $\vec{M}$ та вісь x_3. Тоді вісь x_2 буде перпендикулярною цій площині. Проекції моменту $\vec{M}$ на ці координатні вісі мають такі значення (Рис.15):

$$M_1 = M\sin\vartheta, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = M\cos\vartheta. \qquad (24.2)$$

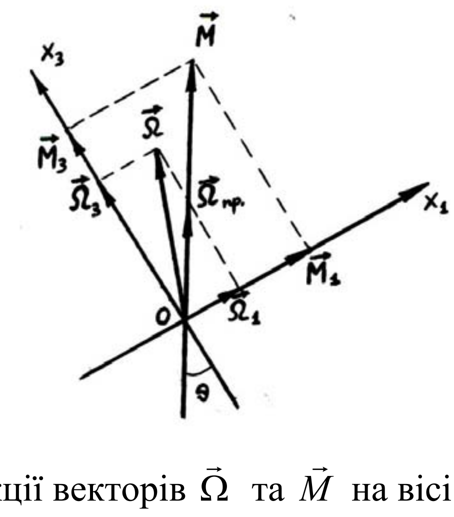

Рис. 15. Проекції векторів $\vec{\Omega}$ та $\vec{M}$ на вісі системи відліку, у якій точка O – центр мас, а вісь x_3 – вісь симетрії симетричної дзиги

Вектор кутової швидкості $\vec{\Omega}$ симетричної дзиги не паралельний вектору $\vec{M}$. Його компоненти:

$$\Omega_1 = \frac{M}{I_1}\sin\vartheta, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \frac{M}{I_3}\cos\vartheta. \tag{24.3}$$

У процесі обертання дзиги навколо центру мас співвідношення (24.2), (24.3) не змінюються. Це позначає, що лінійна швидкість будь-якої точки дзиги $\vec{v} = [\vec{\Omega}, \vec{r}]$ перпендикулярна вектору $\vec{M}$, тобто вісь дзиги обертається навколо вектора $\vec{M}$ з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}_{пр}$, описуючи круговий конус. Такий рух, як було сказано вище, називається регулярною прецесією:

$$\Omega_{пр} = \frac{M}{I_1}. \tag{24.4}$$

З (23.7) випливає, що функція Лагранжа обертального руху вільної симетричної дзиґи у кутах Ейлера має вигляд:

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2. \tag{24.5}$$

Оскільки кути ψ та φ – циклічні змінні, відповідні узагальнені імпульси зберігаються:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = const \;, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = const \;. \tag{24.6}$$

Таким чином, вільна симетрична дзиґа у кутах Ейлера описується рівняннями:

$$I_1\ddot{\vartheta} = \left(I_1\dot{\varphi}^2\cos\vartheta - p_\psi\right)\dot{\varphi}\sin\vartheta, \tag{24.7}$$

$$p_\psi = I_3\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right), \quad p_\psi = const, \tag{24.8}$$

$$p_\varphi = I_1\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + p_\psi\cos\vartheta \;, \quad p_\varphi = const. \tag{24.9}$$

Якщо напрям вісі z декартової системи координат (див. Рис.14) співпадає з напрямом моменту імпульсу $\vec{M}$ дзиги, узагальнені імпульси p_φ та p_ψ дорівнюють:

$$p_\varphi = M, \quad p_\psi = M\cos\vartheta. \tag{24.10}$$

Тоді з (24.8), (24.9) випливає

$$I_1\dot{\varphi} = M. \tag{24.11}$$

Підстановка (24.10), (24.11) у (24.7) надає:

$$I_1\ddot{\vartheta} = 0, \tag{24.12}$$

тобто узагальнений імпульс p_ϑ також є інтегралом руху:

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = I_1\dot{\vartheta} = const. \tag{24.13}$$

Оскільки p_ϑ є проекцією вектора $\vec{M}$ на вісь вузлів ON (див. Рис.14), яка перпендикулярна $\vec{M}$,

$$p_\vartheta = 0, \tag{24.14}$$

тобто кут ϑ у процесі обертання дзиги залишається незмінним:

$$\vartheta = const \tag{24.15}$$

Кутова швидкість $\vec{\Omega}$ вільної симетричної дзиги визначається співвідношеннями:

$$\vec{\Omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\varphi}}, \quad \dot{\psi} = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} M \cos\vartheta, \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{I_1}, \quad \vartheta = const, \tag{24.16}$$

що співпадає з (24.3), (24.4).

Задача 24.1. Знайти функцію Лагранжа (у кутах Ейлера), інтеграли руху та дослідити характер руху симетричної дзиги с нерухомою нижньою точкою у полі сил тяжіння. Встановити, за яких умов кут ϑ дзиги змінюється за часом, як гармонічний осцилятор, та знайти відповідну частоту (частоту нутації дзиги).

25. Рух у неінерціальних системах відліку

Рух будь-яких згаданих вище механічних систем розглядався у інерціальних системах відліку, тобто у системах, пов'язаних між собою перетвореннями Галілея (2.4), (2.5):

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t, \quad t = t', \quad \vec{V} = const. \tag{25.1}$$

У таких системах відліку система тіл відліку (напр., система чотирьох матеріальних точок, що не лежать у одній площині) рухається у одному напрямі з однією та тією ж швидкістю. Відстані між тілами відліку можна використати для визначення одиниць масштабу у трьох взаємно ортогональних напрямках (оскільки простір тривимірний), і величини цих масштабів у інерційних системах відліку з течією часу не змінюються[3]. Іншими словами,

[3] Відмітимо, що у найзагальнішому випадку тіла відліку неінерціальної системи можуть рухатися у будь-яких напрямках з довільними швидкостями. Це призводить до того, що треба враховувати не тільки поступальні та обертальні прискорення системи відліку, але й зміну з часом відповідних масштабів. З такими неінерціальними системами відліку стикаються при дослідженні процесів у рамках загальної теорії відносності Ейнштейна. Далі ці неінерціальні системи відліку розглядати не будемо.

система тіл відліку у інерціальних системах відліку рухається як вільне тверде тіло.

Якщо система тіл відліку рухається як тверде тіло зі змінною поступальною швидкістю $\vec{V}(t)$ та змінною обертальною швидкістю $\vec{\Omega}(t)$, то при розрахунках траєкторії руху механічних систем треба враховувати так звані сили інерції, тобто додаткові внески, які з'являються поряд з внесками дійсних сил у рівняннях руху, записаних у формі рівнянь Ньютона. Такі системи відліку називаються ***неінерціальними***. Послідовно знайти повний набір сил інерції, які діють на механічні системи у тих чи інших неінерціальних системах відліку можна тільки у рамках лагранжового підходу, оскільки функція Лагранжа механічної системи – це скалярна функція, тобто функція, форма якої не змінюється при будь-яких координатних перетвореннях.

Щоб проілюструвати, які сили інерції з'являються у неінерціальних системах відліку, розглянемо рух вільної частинки у системі відліку, що рухається поступово зі швидкістю $\vec{V}(t)$, та обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}(t)$ відносно лабораторної системи. У лабораторній системі відліку K функція Лагранжа має вигляд (3.1):

$$L = \frac{mv^2}{2}. \tag{25.2}$$

Перейдемо до системи відліку K', у якій швидкість частинки $\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \dot{\vec{r}}\,'$, пов'язана зі швидкістю $\vec{v}$ у системі відліку K співвідношенням:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}(t) + [\vec{\Omega}(t), \vec{r}\,']. \tag{25.3}$$

Підставимо цей вираз у (25.2) та розкриємо квадрат суми:

$$\begin{gathered} L = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m\vec{V}(t)^2}{2} + \frac{m[\vec{\Omega}(t), \vec{r}\,']^2}{2} + \\ + m\vec{v}\,'\vec{V}(t) + m\vec{v}\,'[\vec{\Omega}(t), \vec{r}\,'] + m\vec{V}(t)[\vec{\Omega}(t), \vec{r}\,']. \end{gathered} \tag{25.4}$$

За властивістю функції Лагранжа (2.2), повна похідна за часом від будь-якої функції часу та вектора $\vec{r}\,'$ не дає внесків у рівняння руху, і таким доданком можна у функції Лагранжа знехтувати. У (25.4) це другий доданок:

$$\frac{m\vec{V}(t)^2}{2}=\frac{d}{dt}f_1(t),\quad f_1(t)=\frac{m}{2}\int\vec{V}(t)^2dt\,, \tag{25.5}$$

а також частина суми четвертого та останнього доданків $m\vec{V}(t)\left(\vec{v}'+[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']\right)$, котру з урахуванням повної похідної за часом від радіус-вектора $\vec{r}'$ у системі відліку K' (22.7) $\frac{d\vec{r}'}{dt}=\vec{v}'+[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']$, можна перетворити до вигляду:

$$m\vec{V}(t)\left(\vec{v}'+[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']\right)=m\vec{V}(t)\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(m\vec{V}(t)\vec{r}'\right)-m\vec{r}'\vec{W}(t), \tag{25.6}$$

де $\vec{W}(t)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$ – поступальне прискорення системи відліку K. Таким чином функція Лагранжа вільної частинки у системі відліку K' з законом додавання швидкостей (25.3) матиме вигляд:

$$L=\frac{mv'^2}{2}+\frac{m[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']^2}{2}-m\vec{r}'\vec{W}(t)+m\vec{v}'[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']. \tag{25.7}$$

Відповідне рівняння Ейлера-Лагранжа у змінних $\vec{r}'$, $\vec{v}'$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}'}-\frac{\partial L}{\partial\vec{r}'}=0 \tag{25.8}$$

знайдемо з урахуванням того, що в другому доданку (25.7)

$$[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']^2=[\vec{\Omega}(t),\vec{r}'][\vec{\Omega}(t),\vec{r}']=$$
$$=[\vec{r}',[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']]\cdot\vec{\Omega}(t)=\Omega(t)^2r'^2-\left(\vec{\Omega}(t)\vec{r}'\right)^2,$$

а у останньому доданку (25.7) можна циклічно переставити множники $\vec{v}'[\vec{\Omega}(t),\vec{r}']=\vec{r}'[\vec{v}',\vec{\Omega}(t)]$:

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}'}=m[\vec{\Omega}(t),[\vec{r}',\vec{\Omega}(t)]]-m\vec{W}(t)+m[\vec{v}',\vec{\Omega}(t)], \tag{25.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{v}'}=m\vec{v}'+m[\vec{\Omega}(t),\vec{r}'], \tag{25.10}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}'}=m\dot{\vec{v}}'+m[\dot{\vec{\Omega}}(t),\vec{r}']+m[\vec{\Omega}(t),\dot{\vec{r}}']. \tag{25.11}$$

Підставимо (25.9)-(25.11) у (25.8) та запишемо це рівняння у формі рівняння Ньютона:

$$\begin{gathered}m\dot{\vec{v}}'=m[\vec{\Omega}(t),[\vec{r}',\vec{\Omega}(t)]]-\\-m\vec{W}(t)+2m[\vec{v}',\vec{\Omega}(t)]+m[\vec{r}',\dot{\vec{\Omega}}(t)]\ .\end{gathered} \tag{25.12}$$

Усі доданки правої частини рівняння (25.12) – це сили інерції, що діють на вільну частинку у системі відліку K'. Перший доданок

$m[\vec{\Omega}(t),[\vec{r}\,',\vec{\Omega}(t)]]$ – це ***відцентрова сила***, яка перпендикулярна вісі обертання (кутовій швидкості $\vec{\Omega}(t)$) та напрямлена від вісі. Сила інерції $\vec{W}(t)$ пропорційна масі частинки так само, як і сила ваги $m\vec{g}$ ($\vec{g}$ – прискорення сили ваги). Ця аналогія покладена у основу теорії гравітації Ейнштейна – загальної теорії відносності (принцип еквівалентності). Сила $2m[\vec{v}\,',\vec{\Omega}(t)]$ називається ***коріолісовою***. Ця сила залежить від швидкості частинки. Оскільки вона перпендикулярна до швидкості $\vec{v}\,'$, роботи над частинкою вона не виконує (ця сила може змінити лише напрям швидкості, але не її модуль). Прикладом дії сили Коріоліса є поворот площини коливань маятника Фуко. Сила $m[\vec{r}\,',\dot{\vec{\Omega}}(t)]$ пов'язана з обертальним прискоренням частинки та спеціальної назви не має.

На відміну від реальних сил сили інерції є фіктивні сили. Якщо у інерціальних системах відліку компенсація усіх сил, що діють на частинку, призводить до виконання першого закону Ньютона, компенсація сил інерції у неінерціальній системі відліку зовсім не означає, що у такій системі виконується цей закон.

Задача 25.1. Проаналізувати рух маятника Фуко. Довести, що на географічній широті φ площина коливань маятника Фуко повертається за добу на кут $2\pi\cos\varphi$.

Основні принципи механіки Гамільтона

Гамільтонів підхід у класичній механіці є одним з найплідніших методів теоретичної фізики: окрім широкого застосування у класичній механіці, він покладений у основу квантової механіки, квантової теорії поля та статистичної фізики. Дослідження гамільтонових систем є найважливішою частиною теорії диференціальних рівнянь, які зустрічаються у різних галузях фізики, хімії, біології та інших наук.

26. Канонічні рівняння руху

У рамках механіки Лагранжа дослідження механічної системи з n ступенями вільності являє собою дослідження системи n диференціальних рівнянь другого порядку (рівнянь Ейлера-Лагранжа). Такі системи рівнянь, як правило, мають складну структуру, їх дослідження стикається з цілою низкою проблем. Метод Лагранжа фактично полягає у виборі таких узагальнених координат[4]

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, ..., q_n, t), \quad i = 1, ..., n, \tag{26.1}$$

які максимально спрощують структуру цих рівнянь. У системі з n ступенями вільності можна перетворювати не більш ніж n функцій (26.1), оскільки узагальнені швидкості $\dot{q}_i$ є просто похідні за часом від відповідних узагальнених координат $q_i(t)$:

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i(t). \tag{26.2}$$

Метод Гамільтона, у якому використовуються узагальнені координати $q_i(t)$ та узагальнені імпульси $p_i(t)$, дозволяє виконувати вдвічі ширший клас перетворень – перетворень n узагальнених координат та n узагальнених імпульсів, оскільки узагальнені імпульси пов’язані з узагальненими координатами значно складнішими співвідношеннями, ніж (26.2):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{26.3}$$

---

[4] Відмітимо, що перетворення (26.1) називаються точковими.

Це істотно поширює можливості пошуку таких змінних, у яких рівняння руху механічної системи можуть бути розв'язані.

У основу механіки Гамільтона так само, як і у основу механіки Лагранжа, покладено принцип найменшої дії, але у дії S (1.1) під знаком інтеграла за часом замість функції Лагранжа L, яка залежить від координат q_i та швидкостей $\dot{q}_i$, повинна бути інша функція – функція координат q_i та імпульсів p_i. Перехід до нового набора незалежних змінних виконується за допомогою перетворення Лежандра[5].

Знайдемо повний диференціал функції Лагранжа механічної системи як функції узагальнених координат та узагальнених швидкостей:

$$dL = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right). \qquad (26.3)$$

З урахуванням (26.2) з рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,\dots,n,$$

випливає, що

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (26.4)$$

тому вираз (26.3) можна переписати у вигляді:

$$dL = \sum_{i=1}^{n}(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i). \qquad (26.5)$$

У другому доданку у дужках внесемо узагальнений імпульс p_i під знак диференціала:

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i\dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i. \qquad (26.6)$$

---

[5] Перетворенням Лежандра у математиці називають такий перехід від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ до змінних $y_1, y_2, \dots, y_n$, коли диференціальна форма $dz = y_1dx_1 + y_2dx_2 + \dots + y_ndx_n$, де $y_a = y_a(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial z}{\partial x_a}$, $a = 1, \dots, n$, переходить у диференціальну форму $dZ = x_1dy_1 + x_2dy_2 + \dots + x_ndy_n$, де $x_a = x_a(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial Z}{\partial y_a}$, $a = 1, \dots, n$. За таким перетворенням твірна функція $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ переходить у твірну функцію $Z(y_1, y_2, \dots, y_n)$: $Z = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n - z$.

Враховуючи, що сума повних диференціалів дорівнює повному диференціалу від суми

$$\sum_{i=1}^{n} d(p_i \dot{q}_i) = d\sum_{i=1}^{n} (p_i \dot{q}_i), \qquad (26.7)$$

перепишемо (26.5) у вигляді:

$$d\sum_{i=1}^{n} (p_i \dot{q}_i - L) = -\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i dp_i . \qquad (26.8)$$

Співвідношення (26.8) означає, що функція

$$H = \sum_{i=1}^{n} (p_i \dot{q}_i - L) \qquad (26.9)$$

є функцією узагальнених координат q_i та узагальнених імпульсів p_i. Цю функцію називають ***функцією Гамільтона*** механічної системи. З іншого боку, вираз (26.9) є енергія системи (4.3), тобто ***функція Гамільтона довільної механічної системи – це енергія системи***, записана як функція узагальнених координат та узагальнених імпульсів:

$$H = H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t). \qquad (26.10)$$

Оскільки

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right), \qquad (26.11)$$

з (26.8) маємо:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \qquad (26.12)$$

Ці рівняння називаються ***канонічними рівняннями***, або ***рівняннями Гамільтона*** механічної системи, а координати q_i та імпульси p_i – ***канонічними змінними***.

Рівняння (26.12) можна знайти з варіаційного принципу $\delta S = 0$ для дії

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \big(p_i \dot{q}_i - H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t) \big) dt \qquad (26.13)$$

за умови, що координати системи у момент часу t_1 приймають значення $q_i(t_1)$, а у момент часу t_2 – значення $q_i(t_2)$, тобто приріст

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad i = 1, ..., n . \qquad (26.14)$$

Дійсно, варіація дії (26.13) приводиться до вигляду:

$$\delta S=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i dt-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i dt+\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta q_i\Bigg|_{t_1}^{t_2}=0, \tag{26.15}$$

звідки і випливають рівняння (26.12).

Покажемо, що для системи взаємодіючих частинок з функцією Лагранжа (3.2)

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}-U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)$$

рівняння (26.12) співпадають з рівняннями Ньютона. Дійсно, функція Гамільтона системи (3.2) має вигляд:

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m_i}+U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N). \tag{26.16}$$

Запишемо канонічні рівняння (26.12) для системи (3.2) у векторній формі:

$$\dot{\vec{r}}_i=\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}, \quad \dot{\vec{p}}_i=-\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i}. \tag{26.17}$$

Підставляючи сюди (26.16), бачимо, що перше із співвідношень (26.17) є зв’язок між швидкістю частинки та її імпульсом:

$$\vec{v}_i=\frac{\vec{p}_i}{m_i}, \tag{26.18}$$

а друге – це рівняння Ньютона для частинки з номером i:

$$m\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}=\vec{F}_i, \tag{26.19}$$

оскільки

$$\vec{F}_i=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \tag{26.20}$$

– сила, що діє на для цю частинку.

Задача 26.1. Знайти функцію Гамільтона та канонічні рівняння руху вільної частинки у декартових, циліндричних та сферичних координатах.

Задача 26.2. Знайти функцію Гамільтона та канонічні рівняння руху симетричної дзиги с нерухомою нижньою точкою у полі сил тяжіння.

27. Дужки Пуассона

Нехай механічна система, що має n ступенів вільності, характеризується деякою функцією $f = f(q_1,...,q_n, p_1,..., p_n, t)$. Повна похідна цієї функції за часом дорівнює

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right). \qquad (27.1)$$

На траєкторії руху, тобто з урахуванням рівнянь руху (26.12), ця функція матиме вигляд:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$

або

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \qquad (27.2)$$

де вираз

$$\{f, H\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \qquad (27.3)$$

називається ***дужками Пуассона*** для функцій f та H.

Аналогічно визначаються дужки Пуассона для будь-яких функцій f та g на траєкторії руху механічної системи:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right). \qquad (27.4)$$

Якщо функція є інтегралом руху механічної системи, тобто $\frac{df}{dt} = 0$, з (27.2) маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \qquad (27.5)$$

У випадку, коли інтеграл руху f не залежить явно від часу,

$$\{f, H\} = 0. \qquad (27.6)$$

Таким чином, будь-який інтеграл руху f замкненої системи, функція Гамільтона якої не залежить явно від часу $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$, визначається умовою, що дужки Пуассона для функції f та функції Гамільтона H системи дорівнюватимуть нулю.

Перелічимо властивості дужок Пуассона:

1. $$\{f,g\}=-\{g,f\}, \qquad (27.7)$$
що безпосередньо є наслідком визначення (27.4). Звідси випливає:

2. $$\{f,f\}=0. \qquad (27.8)$$

Оскільки у дужках Пуассона усі внески складаються з похідних, із законів диференціювання функцій випливають властивості:

3. $$\{f_1+f_2,g\}=\{f_1,g\}+\{f_2,g\}, \qquad (27.9)$$

4. $$\{\lambda,f\}=0, \quad \lambda=const, \qquad (27.10)$$

5. $$\{f_1 f_2,g\}=f_2\{f_1,g\}+f_1\{f_2,g\}, \qquad (27.11)$$

6. $$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \qquad (27.12)$$

Якщо однією з функцій у дужках Пуассона є координата q_i або імпульс p_i,

7. $$\{q_i,f\}=\frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \{p_i,f\}=-\frac{\partial f}{\partial q_i}. \qquad (27.13)$$

З урахуванням цих співвідношень канонічні рівняння (26.12) можна записати у вигляді:
$$\dot{q}_i=\{q_i,H\}, \quad \dot{p}_i=\{p_i,H\}. \qquad (27.14)$$
Дужки Пуассона для канонічних змінних q_i, p_i:

8. $$\{q_i,q_k\}=0, \quad \{p_i,p_k\}=0, \quad \{q_i,p_k\}=\delta_{ik}. \qquad (27.15)$$

Відмітимо, що співвідношення (27.14) аналогічні відповідним співвідношенням для квантових операторів, які називають співвідношеннями Еренфеста, а останнє з співвідношень (27.15) – квантовим перестановочним співвідношенням Гейзенберга у квантовій механіці.

Безпосередньо з структури дужок Пуассона (27.4), які є різницею двох груп внесків, випливає тотожність Якобі для будь-яких трьох функцій f, g та h на траєкторії руху:

9. $$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0. \qquad (27.16)$$

Для дужок Пуассона виконуєтся дуже важлива ***теорема Пуассона***: якщо функції f та g є інтегралами руху механічної системи, дужки Пуассона, складені з цих функцій, також є інтегралом руху:

10. $$\frac{d}{dt}\{f,g\}=0, \quad \text{якщо} \quad \frac{df}{dt}=0, \ \frac{dg}{dt}=0. \qquad (27.17)$$

Запишемо повну похідну за часом від дужок Пуассона $\{f, g\}$ у вигляді (27.2):

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{\{f, g\}, H\}. \tag{27.18}$$

Перший внесок у (27.18) перетворимо у відповідності з властивістю (27.12), а другий внесок – з властивістю (27.16):

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{\{H, f\}, g\} - \{\{g, H\}, f\}. \tag{27.19}$$

Враховуючи співвідношення (27.7), (27.9), а також (27.2), маємо:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\}, \tag{27.20}$$

звідки і випливає співвідношення (27.17). Теорема Пуассона дозволяє знаходити нові інтеграли руху механічної системи, для якої вже відомі будь-які два інтеграли руху. Може статися, що дужки Пуассона, складені з відомих інтегралів руху, є просто сталою величиною або комбінацією відомих інтегралів руху. Більш того, кількість інтегралів руху системи з n ступенями вільності взагалі обмежена (дорівнює $2n$). Тому, починаючи з якогось кроку, нових інтегралів руху теорема Пуассона не дає.

Задача 27.1. Знайти дужки Пуассона, складені з декартових компонент радіус-вектора $\vec{r}$, імпульсу $\vec{p}$, моменту імпульсу $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$, квадрата моменту імпульсу $M^2 = \vec{M}\vec{M}$: $\{x_i, p_k\}$, $\{x_i, M_k\}$, $\{p_i, M_k\}$, $\{M_i, M_k\}$, $\{M_i, M^2\}$ та інші.

Задача 27.2. За допомогою дужок Пуассона показати, что момент імпульсу системи зберігається, якщо її функція Гамільтона $H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(r_1, ..., r_n)$ інвариантна відносно довільного нескінченно малого повороту.

Задача 27.3. Скористатися дужками Пуассона та теоремою Пуассона для знаходження інтегралів руху частинки у кулонівському полі.

28. Дія як функція координат

Нехай механічна система з n ступенями вільності, яка характеризується траєкторією руху з узагальненими координатами $q_1(t),...,q_n(t)$, знаходиться у полі зовнішніх сил. Якщо параметри, що характеризують зовнішні сили, змінюються на нескінченно малі величини, траєкторія руху також зазнає нескінченно малих змін. Розглянемо дію

$$S = \int_{t_1}^{t} L dt \qquad (28.1)$$

на пучку близьких траєкторій, котрі у момент часу t_1 проходять через точку $q_1(t_1),...,q_n(t_1)$ конфігураційного простору механічної системи[6]. Покажемо, що на кожній з траєкторій пучка дія (28.1) є функцією координат системи і часу.

При переході від однієї траєкторії до нескінченно близької приріст дії має вигляд:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t} + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \,. \qquad (28.2)$$

Оскільки кожна з траєкторій є дійсною траєкторією руху, тобто траєкторією, яку можна отримати як розв'язок рівнянь Ейлера-Лагранжа, сума інтегралів у (28.2) дорівнюватиме нулю.

Для усіх траєкторій пучка у момент часу t_1

$$\delta q_i(t_1) = 0 \,, \quad i = 1,...,n \,, \qquad (28.3)$$

тому з урахуванням (26.3) вираз (28.2) спрощується:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i \,. \qquad (28.4)$$

З цього співвідношення випливає, що частинні похідні від дії за координатами q_i дорівнюють відповідним імпульсам:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \,. \qquad (28.5)$$

Повна похідна за часом від дії (28.1) є функцією Лагранжа механічної системи:

$$\frac{dS}{dt} = L \,. \qquad (28.6)$$

---

[6] Конфігураційний простір механічної системи з n ступенями вільності – це математичний простір усіх припустимих значень узагальнених координат цієї системи $q_1,..., q_n$, які розглядаються як декартові координати n-вимірного евклідового простору.

З іншого боку

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i\,. \tag{28.7}$$

Порівнюючи (28.6) з (28.7) та враховуючи (26.9), (28.5), знаходимо:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q_1,..,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},...,\frac{\partial S}{\partial q_n},t)=0\,. \tag{28.8}$$

Рівняння (28.8) називається ***рівнянням Гамільтона-Якобі***. Це рівняння відіграє найважливішу роль у методі розв'язання рівнянь механічної системи, який називається ***методом Гамільтона-Якобі***.

Враховуючи співвідношення (28.4) та (28.8), знаходимо повний диференціал дії (28.1):

$$dS=\sum_{i=1}^{n}p_i dq_i-Hdt\,. \tag{28.9}$$

Якщо дія визначається для будь-яких моментів часу t_1 та t_2

$$S=\int_{t_1}^{t_2}Ldt\,,$$

її повний диференціал дорівнюватиме різниці співвідношень правої частини (28.9), узятих у моменти t_1 та t_2:

$$dS=\sum_{i=1}^{n}p_i(t_2)dq_i(t_2)-H^{(2)}dt_2-\sum_{i=1}^{n}p_i(t_1)dq_i(t_1)+H^{(1)}dt_1\,, \tag{28.10}$$

де $H^{(1)}$ та $H^{(2)}$, відповідно, значення функції Гамільтона, узяті у моменти часу t_1 і t_2. Це співвідношення показує, що будь-яка механічна система переходить зі стану у момент часу t_1 до стану у момент часу t_2 таким чином, що права частина (28.10) є повний диференціал.

29. Канонічні перетворення

Рівняння Ейлера-Лагранжа, так само, як і рівняння Гамільтона, інваріантні відносно будь-яких точкових перетворень (26.1), оскільки при переході від координат q_i до якихось нових координат Q_i змінюються тільки аргументи функції Лагранжа.

Розглянемо більш загальний клас перетворень: перехід від старих узагальнених координат $q_1,...,q_n$ та узагальнених імпульсів $p_1,..., p_n$ до нових координат $Q_1,...,Q_n$ та нових імпульсів $P_1,...,P_n$:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_1,...,q_n, p_1,..., p_n,t), \\ P_i &= P_i(q_1,..,q_n, p_1,.., p_n,t), \quad i = 1,...,n, \end{aligned} \tag{29.1}$$

котрі не змінюють форму рівнянь Гамільтона, тобто рівняння

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,...,n \tag{29.2}$$

переходять у рівняння

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad i = 1,...,n, \tag{29.3}$$

де

$$H' = H'(Q_1,...,Q_n, P_1,...,P_n,t) \tag{29.4}$$

– нова функція Гамільтона. Такі перетворення називаються ***канонічними*** або ***контактними***.

Оскільки для механічної системи як у старих, так і у нових змінних виконується принцип найменшої дії, рівняння (29.2) можна отримати з варіації :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - H(q_1,...,q_n, p_1,..., p_n,t)\right)dt = 0, \tag{29.5}$$

а рівняння (29.3) – з варіації

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\,\dot{Q}_i - H'(Q_1,...,Q_n, P_1,...,P_n,t)\right)dt = 0. \tag{29.6}$$

Перша з варіацій виконується за умовою

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad i = 1,...,n, \tag{29.7а}$$

а друга – за умовою

$$\delta Q_i(t_1) = \delta Q_i(t_2) = 0, \quad i = 1,...,n. \tag{29.7б}$$

Якщо до підінтегральних виразів (29.5), (29.6) додати повну похідну від будь-якої функції

$$F = F(q_1,...,q_n, Q_1,...,Q_n,t), \tag{29.8}$$

відповідні варіації за умовами (29.7) дорівнюватимуть нулю:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{dF}{dt}dt = \delta F\,\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i\,\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Q_i}\delta Q_i\,\Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{29.9}$$

Це дозволяє зв'язати підінтегральні вирази (29.5) та (29,6) співвідношенням :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t) = \sum_{i=1}^{n} P\dot{Q}_i -$$

$$- H'(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n,t) + \frac{d}{dt} F(q_1,..,q_n,Q_1,...,Q_n,t). \tag{29.10}$$

Враховуючи, що повна похідна за часом

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right),$$

а також, що координати q_i та Q_i $\left(i = 1,...,n\right)$ – незалежні одна від одної, з (29.10) маємо

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad i = 1,...,n, \tag{29.11}$$

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad i = 1,...,n, \tag{29.12}$$

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{29.13}$$

Набір рівнянь (29.11) дозволяє знайти нові координати

$$Q_i = Q_i(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t).$$

Підставляючи ці співвідношення у (29.12), знайдемо

$$P_i = P_i(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t),$$

тобто знайдемо канонічне перетворення (29.1) та нову функцію Гамільтона H' (29.4) у рівняннях (29.3). Функцію (29.8) називають ***твірною функцією*** цього канонічного перетворення. Напр., якщо твірна функція *F* має вигляд

$$F = \sum_{i=1}^{n} q_i Q_i, \tag{29.14}$$

з (29.11), (29.12) знаходимо

$$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i, \tag{29.15}$$

тобто канонічне перетворення з твірною функцією (29.14) визначає нові координати Q_i як старі імпульси, а нові імпульси P_i – як старі координати (зі знаком „мінус"). Нова функція Гамільтона H' після такого канонічного перетворення співпадає зі старою $H' = H$. Цей приклад показує, що назви „нові координати" та „нові імпульси" мають умовний характер. Тому змінні q_i та p_i у методі Гамільтона називають ***канонічно спряженими функціями***.

За допомогою перетворення Лежандра можна знайти також інші твірні функції окрім (29.8). Якщо ввести функцію

$$\Phi = \Phi(q_1,..,q_n,P_1,..,P_n,t), \qquad (29.16)$$

пов’язану з функцією F (29.8) співвідношенням

$$\Phi = F + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i , \qquad (29.17)$$

замість (29.10) будемо мати:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n,t) = -\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{P}_i - \\ - H'(Q_1,..,Q_n,P_1,..,P_n,t) + \frac{d}{dt}\Phi(q_1,..,q_n,P_1,..,P_n,t) ,\end{gathered} \qquad (29.18)$$

і звідси

$$p_i = \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial\Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \qquad (29.19)$$

Першій набір з цих співвідношень дозволяє знайти нові імпульси P_i, з другого знаходимо нові координати Q_i, останнє співвідношення встановлює нову функцію Гамільтона H'.

Співвідношення

$$V = F - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \qquad (29.20)$$

визначає твірну функцію

$$V = V(p_1,..,p_n,Q_1,..,Q_n,t) , \qquad (29.21)$$

для якої

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{n} q_i\,\dot{p}_i - H(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - \\ - H'(Q_1,..,Q_n,P_1,..,P_n,t) + \frac{d}{dt}V(p_1,..,p_n,Q_1,..,Q_n,t) ,\end{gathered} \qquad (29.22)$$

звідки знаходимо

$$q_i = -\frac{\partial V}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial V}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial V}{\partial t}. \qquad (29.23)$$

Для твірної функції

$$W = W\left(p_1,..,p_n,P_1,..,P_n,t\right), \qquad (29.24)$$

$$W = F - \sum_{i=1}^{n} (p_i q_i - P_i Q_i), \qquad (29.25)$$

яка встановлює зв'язок

$$- \sum_{i=1}^{n} q_i \dot{p}_i - H(q_1,..,q_n,p_1,..,p_n,t) = -\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{P}_i - \\ - H'(Q_1,..,Q_n,P_1,..,P_n,t) + \frac{d}{dt} W(p_1,..,p_n,P_1,..,P_n,t), \qquad (29.26)$$

канонічне перетворення визначається співвідношеннями:

$$q_i = -\frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial W}{\partial t}. \qquad (29.27)$$

Таким чином, існує чотири види твірних функцій (29.8), (29.16), (29.21), (29.24), за допомогою яких виконуються канонічні перетворення. Коли якась з цих твірних функцій не залежить явно від часу (як, напр., функція (29.14)) нова функція Гамільтона H' співпадає зі старою

$$H' = H. \qquad (29.28)$$

Метою канонічних перетворень є знаходження таких нових канонічно спряжених зміних Q_i, P_i та нової функції Гамільтона H', для яких нові канонічні рівняння (29.3) дозоляли б знайти точні розв'язки, тобто знайти траєкторію руху механічної системи.

Задача 29.1. Знайти умову, за якою лінійне перетворення $Q = aq + bp, \; P = cq + dp$ змінних q та p є канонічним.

30. Метод Гамільтона-Якобі

Метод Гамільтона-Якобі є одним з трьох основних методів теоретичної механіки. *У **методі Лагранжа*** необхідно знайти розв'язання системи n диференціальних рівнянь другого порядку (рівнянь Ейлера-Лагранжа), вигляд яких спрощується за допомогою точкових перетворень (26.1). ***Метод Гамільтона*** пропонує пошуки розв'язання системи $2n$ рівнянь першого порядку, для спрощення яких використовуються канонічні перетворення. ***Метод Гамільтона-Якобі*** використовує таке канонічне перетворення, у результаті якого нова функція Гамільтона дорівнюватиме нулю:

$$H' = 0. \qquad (30.1)$$

Як результат, нові рівняння Гамільтона (29.3) – це просто повний набір інтегралів руху механічної системи, який дозволяє знайти траєкторію руху, тобто набір координат як функцій часу та $2n$

довільних сталих (початкових умов для розгляданої механічної системи з n ступенями вільності).

Для знаходження канонічного перетворення з умовою (30.1) використаємо повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі (28.8):

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q_1,...,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},...,\frac{\partial S}{\partial q_n},t)=0, \qquad (30.2)$$

тобто розв'язок цього рівняння, у якому є стільки сталих інтегрування, скільки ступенів вільності має механічна система.

$$S=S(q_1,...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_n,t), \quad \alpha_i=const, \quad i=1,...,n. \qquad (30.3)$$

Цей розв'язок можна розглядати як твірну функцію (29.16) канонічного перетворення, у якому сталі α_i відіграють роль нових імпульсів:

$$P_i=\alpha_i=const. \qquad (30.4)$$

З (29.19) випливає, що нові координати – це похідні від функції (30.3) за новими імпульсами:

$$Q_i=\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad i=1,...,n. \qquad (30.5)$$

Однак, як видно з рівнянь (29.3), за умовою (30.1) ці нові координати є інтеграли руху, тобто константи. Тому похідні $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ слід прирівняти новим константам β_i:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i, \quad \beta_i=const, \quad i=1,...,n. \qquad (30.6)$$

Співвідношення (30.6) визначають траєкторію руху механічної системи.

Таким чином, метод Гамільтона-Якобі полягає у виконанні наступних операцій:

1. За допомогою функції Гамільтона H знайти рівняння Гамільтона-Якобі (30.2), де у функції H необхідно замінити усі імпульси p_i на похідні $\frac{\partial S}{\partial q_i}$.

2. Знайти повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі, тобто розв'язок (30.3), який матиме стільки констант, скільки ступенів вільності має механічна система (сталі $\alpha_1,...,\alpha_n$).

3. Знайти похідні $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ та прирівняти їх новим константам β_i (30.6).

4. Із співвідношень (30.6) знайти траєкторію руху механічної системи з врахуванням початкових умов задачі.

31. Відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона-Якобі

Найважливішою частиною метода Гамільтона-Якобі є знаходження повного інтеграла (30.3) рівняння (30.2). Розглянемо, яким чином можна здобути такий роз’язок . Якщо механічна система є замкненою, тобто якщо функція Гамільтона цієї системи не залежить безпосередньо від часу, зберігається енергія E, і дію S можна представити у формі:

$$S = -Et + S_1(q_1,...,q_n), \tag{31.1}$$

де S_1 називають ***скороченою дією***. Підстановка (31.1) у (30.2) дає рівняння зі змінними $q_1,...,q_n$:

$$H(q_1,...,q_n,\frac{\partial S_1}{\partial q_1},...,\frac{\partial S_1}{\partial q_n}) - E = 0. \tag{31.2}$$

Коли функція Гамільтона механічної системи має циклічні змінні $q_1,...,q_l$ $(l < n)$, зберігаються відповідні узагальнені імпульси:

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial q_a} = \alpha_a = const, \quad a = 1,...,l, \tag{31.3}$$

Дія S для такої системи може бути записана у вигляді:

$$S = \sum_{a=1}^{l} \alpha_a q_a + S_2(q_{l+1},...,q_n,t), \quad \alpha_a = const. \tag{31.4}$$

Рівняння (30.2) після такої підстановки матиме змінні t та $q_{l+1},...,q_n$:

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + H(q_{l+1},...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_l,\frac{\partial S}{\partial q_{l+1}},...,\frac{\partial S}{\partial q_n},t) = 0. \tag{31.5}$$

Послідовне відокремлення внесків інших змінних можливо провести за допомогою процедури, яка називається ***відокремленням змінних***. Для цього рівняння (30.2) необхідно перетворити на рівність, у якій з одного боку є тільки внески з відокремленою змінною (напр., q_n), а з другого – внески з усіма іншими змінними, тобто рівність у формі:

$$f_1(q_n) = f_2(q_1,...,q_{n-1}). \tag{31.6}$$

Оскільки змінні $q_1,...,q_n$ – незалежні, співвідношення (31.6) виконується тільки тоді, коли обидві частини дорівнюють константі α_n:

$$f_1(q_n) = \alpha_n, \tag{31.7}$$

$$f_2(q_1,...,q_{n-1}) = \alpha_n. \tag{31.8}$$

Для рівняння (31.8) цю процедуру можна повторити.

Оскільки у рівняння Гамільтона-Якобі (30.2) входять тільки похідні від функції S за часом та узагальненими координатами, метод відокремлення змінних фактично означає, що повний інтеграл цього рівняння матиме структуру:

$$S = S_0(t) + \sum_{a=1}^{n} S_a(q_a). \tag{31.9}$$

Як приклад визначення траєкторії руху методом відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона-Якобі, розглянемо частинку, що рухається у полі:

$$U(r,\vartheta,\varphi) = A(r) + \frac{B(\vartheta)}{r^2} + \frac{C(\varphi)}{r^2\sin^2\vartheta}, \tag{31.10}$$

де r, ϑ, φ – сферичні координати, $A(r)$ характеризує поле зі сферичною симетрією, другий внесок – поле з віссю симетрії, що має сингулярність у точці $r = 0$, останній внесок характеризує анізотропне поле струни, натягнутої вздовж вісі z декартової системи координат (зі сингулярністю у точці $r = 0$).

Функція Гамільтона такої частинки має вигляд:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\vartheta} + A(r) + \frac{B(\vartheta)}{r^2} + \frac{C(\varphi)}{r^2\sin^2\vartheta}. \tag{31.11}$$

Побудуємо рівняння Гамільтона-Якобі, замінивши у (31.11) усі узагальнені імпульси на похідні від дії S за відповідними координатами:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi},$$

тобто знайдемо:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \\ + A(r) + \frac{B(\vartheta)}{r^2} + \frac{C(\varphi)}{r^2\sin^2\vartheta} = 0 \ .\end{gathered} \tag{31.12}$$

Оскільки функція Гамільтона (31.11) не залежить явно від часу, зберігається енергія E частинки, і дію S представимо у формі (31.1):

$$S = -Et + S_1(r,\vartheta,\varphi), \quad E = const. \tag{31.13}$$

Підставимо (31.13) у (31.12) та перепишемо рівняння для функції $S_1(r,\vartheta,\varphi)$ у вигляді:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial\varphi}\right) + C(\varphi) = \\ = r^2\sin^2\vartheta\left\{Et - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right) - \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial\vartheta}\right) - A(r) - \frac{B(r)}{r^2}\right\}\ .\end{gathered} \tag{31.14}$$

Функція S_1 входить у це рівняння тільки через похідні за координатами, тому представимо цю функцію як суму:

$$S_1(r,\vartheta,\varphi) = f(\varphi) + S_2(r,\vartheta). \tag{31.15}$$

Після підстановки (31.15) у (31.14) видно, що ліва частина співвідношення залежить від φ, а права – від r та ϑ :

$$\begin{gathered}\frac{1}{2m}\left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 + C(\varphi) = r^2\sin^2\vartheta\left\{E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial r}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)^2 - A(r) - \frac{B(\vartheta)}{r^2}\right\}\ .\end{gathered} \tag{31.16}$$

Оскільки φ, r та ϑ – незалежні змінні, співвідношення (31.16) виконується тільки коли кожна з частин його дорівнює константі:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 + C(\varphi) = \alpha_1, \quad \alpha_1 = const, \tag{31.17}$$

$$\begin{gathered}r^2\sin^2\vartheta\left\{E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial r}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)^2 - A(r) - \frac{B(\vartheta)}{r^2}\right\} = \alpha_1\ .\end{gathered} \tag{31.18}$$

Розв’язок рівняння (31.17) знаходимо методом відокремлення змінних:

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = \sqrt{2m(\alpha_1 - C(\varphi))}. \tag{31.19}$$

Знак „±” перед коренем не виписуємо, але його треба враховувати при підстановці конкретних початкових умов задачі. З (31.19) маємо вираз для функції $f(\varphi)$:

$$f(\varphi) = \int \sqrt{2m(\alpha_1 - C(\varphi))}d\varphi. \qquad (31.20)$$

Рівняння (31.18) представимо у вигляді:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)^2 + B(\vartheta) + \frac{\alpha_1}{\sin^2\vartheta} = \\ = r^2\left(E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(r,\vartheta)}{\partial r}\right)^2 - A(r)\right). \end{gathered} \qquad (31.21)$$

Якщо функцію $S_2(r,\vartheta)$ шукати як суму :

$$S_2(r,\vartheta) = g(r) + h(\vartheta), \qquad (31.22)$$

змінні у (31.21) повністю відокремлюються:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dh(\vartheta)}{d\vartheta}\right)^2 + B(\vartheta) + \frac{\alpha_1}{\sin^2\vartheta} = \alpha_2, \quad \alpha_2 = const, \qquad (31.23)$$

$$r^2\left(E - \frac{1}{2m}\left(\frac{dg(r)}{dr}\right)^2 - A(r)\right) = \alpha_2. \qquad (31.24)$$

Розв’язки цих рівнянь мають вигляд:

$$h(\vartheta) = \int \sqrt{2m\left(\alpha_2 - B(\vartheta) - \frac{\alpha_1}{\sin^2\vartheta}\right)}d\vartheta, \qquad (31.25)$$

$$g(r) = \int \sqrt{2m\left(E - A(r) - \frac{\alpha_2}{r^2}\right)}dr. \qquad (31.26)$$

У результаті повний інтеграл рівняння (31.12) має вигляд:

$$\begin{gathered} S = -Et + \int \sqrt{2m(\alpha_1 - C(\varphi))}d\varphi + \int \sqrt{2m\left(\alpha_2 - B(\vartheta) - \frac{\alpha_1}{\sin^2\vartheta}\right)}d\vartheta \\ + \int \sqrt{2m\left(E - A(r) - \frac{\alpha_2}{r^2}\right)}dr, \qquad E, \alpha_1, \alpha_2 - const \; . \end{gathered} \qquad (31.27)$$

Розглянемо цю функцію як твірну (29.16) для канонічного перетворення до нових імпульсів:

$$P_1 = E, \quad P_2 = \alpha_1, \quad P_3 = \alpha_2. \qquad (31.28)$$

Згідно з (29.19), похідні від функції (31.27) за цими імпульсами є нові узагальнені координати:

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial E}, \quad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad Q_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}. \qquad (31.29)$$

Оскільки, відповідно з (29.18), нова функція Гамільтона:

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t},$$

а права частина цього співвідношення – рівняння Гамільтона-Якобі (30.2), тому

$$H' = 0.$$

З (29.3) приходимо до висновку, що узагальнені координати (31.29) – константи:

$$Q_a = \beta_a = const, \quad a = 1, 2, 3.$$

Таким чином, з (31.27), (31.29) знаходимо:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t - \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{\left(E - A(r) - \frac{\alpha_2}{r^2}\right)}} = \beta_1, \qquad (31.30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_1 - C(\varphi)}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta \sqrt{\sin^2\vartheta\left(\alpha_2 - B(\vartheta)\right) - \alpha_1}} = \beta_2, \qquad (31.31)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\vartheta(\alpha_2 - B(\vartheta)) - \alpha_1}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{r\sqrt{r^2\left(E - A(r)\right) - \alpha_2}} = \beta_3 \qquad (31.32)$$

Рівняння (31.30)-(31.32) визначають траєкторію руху частинки у полі (31.10): маємо $r = r(t)$ – із співвідношення (31.30), $\vartheta = \vartheta(r)$ – із співвідношення (31.32), $\varphi = \varphi(\vartheta)$ – з (31.31).

Задача 31.1. Заряджена частинка у кулонівському та однорідному електричному полях (потенціальна енергія $U = \frac{a}{r} + bz; a, b - const$).

У кінетичній енергії частинки перейти від циліндричних координат (ρ, φ, z) до параболічних (ξ, η, φ) за формулами $z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \rho = \sqrt{\xi\eta}$, знайти рівняння Гамільтона, обчислити дужку Пуассона $\{\xi, H\}$ та визначити траєкторію руху методом Гамільтона-Якобі.

32. Змінні „дія-кут”

Нехай для консервативної механічної системи, тобто для системи, де зберігається енергія, існують такі узагальнені координати, у яких рівняння Гамільтона-Якобі допускає відокремлення змінних. Вибір констант $\alpha_1,...,\alpha_n$ у твірній функції S (30.3) може бути довільним. Виконаємо канонічне перетворення до таких нових координат $\varphi_1,...,\varphi_n$ та нових імпульсів $I_1,...,I_n$, у яких нова функція Гамільтона (29.4) H' залежатиме тільки від імпульсів $I_a = I_a(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $a = 1,...,n$:

$$H' = H'(I_1,...,I_n). \qquad (32.1)$$

Канонічні рівняння (29.3) у таких змінних мають вигляд:

$$\dot{\varphi}_a = \frac{\partial H'}{\partial I_a}, \quad \dot{I}_a = 0, \quad a = 1,...,n. \qquad (32.2)$$

Оскільки система консервативна, усі похідні $\frac{\partial H'}{\partial I_a}$ не залежать від часу:

$$\frac{\partial H'}{\partial I_a} = \omega_a = const, \qquad (32.3)$$

і закон руху системи має вигляд:

$$\varphi_a(t) = \omega_a t + \varphi_{0a}, \quad \varphi_{0a} = const, \quad a = 1,...,n. \qquad (32.4)$$

Величини ω_a представляють собою ***частоти*** зміни координат φ_a.

Щоб з’ясувати, яким може бути рух таких систем, розглянемо траєкторію одновимірної системи у ***фазовому просторі***, тобто у двовимірному евклідовому просторі з декартовими вісями q та p.

Рух одновимірної консервативної системи може бути двох типів.

а) Координата $q(t)$ та імпульс $p(t)$ є періодичні функції з однаковим періодом T:

$$q(t) = q(t+T), \quad p(t) = p(t+T). \qquad (32.5)$$

Якщо з цих співвідношень виключити час, тобто побудувати криву $p = p(q)$, вона буде мати у площині q, p замкнену форму (Рис.16а). Цей рух характерний для коливальних систем, наприклад, для одновимірного гармонічного осцилятора. Делоне, який, розглядаючи задачу трьох тіл (Земля, Місяць, Сонце), вперше ввів змінні „дія-кут”, назвав такий рух ***лібрацією***.

б) Інший характер руху буде у системи, координата q якої може приймати будь-які значення, а імпульс p є періодичною функцією координати:

$$p(q) = p(q+T). \tag{32.6}$$

У цьому випадку траєкторія у фазовому просторі є незамкненою періодичною лінією (Рис.16б). Прикладом такого руху є обертання твердого тіла навколо нерухомої вісі, координата q якого – це кут обертання φ. Через період

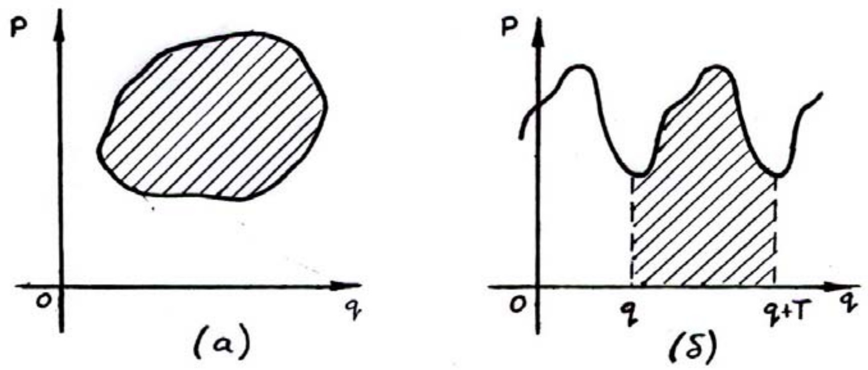

Рис. 16. Траєкторія руху одновимірної механічної системи у фазовому просторі (***фазовий портрет***): а) лібрація; б) обертання

$T = 2\pi$ будь-яке положення твердого тіла повторюється знову. Такий рух називають ***обертанням***.

Як приклад, розглянемо одновимірний математичний маятник довжини l, рух якого відбувається у фіксованій вертикальній площині. Енергія такої системи не змінюється:

$$E = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = const, \tag{32.7}$$

де φ – кут відхилення маятника від положення рівноваги (Рис.17). Залежність імпульсу p від кута φ

$$p = \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\varphi)} \tag{32.8}$$

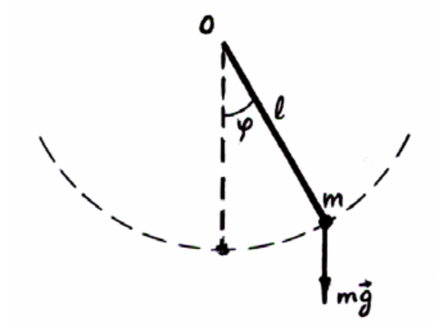

Рис. 17. Математичний маятник

визначає траєкторію маятника у фазовому просторі. Якщо енергія $E < mgl$, рух маятника можливий тільки для кутів $|\varphi| \leq \varphi_1$, де φ_1 визначається умовою

$$E + mgl\cos\varphi_1 = 0. \qquad (32.9)$$

У цьому випадку фазова траєкторія маятника є замкненою (крива 1 на Рис.18). Енергії $E = mgl$ відповідає крива 2 Рис.18.

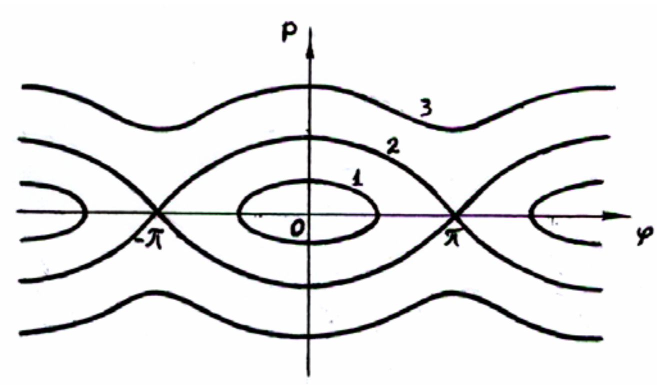

Рис. 18. Фазовий портрет математичного маятника

Маятник досягає найвищої точки траєкторії – кута $\varphi = \pi$ з нульовою швидкістю. Крива 2 називається ***сепаратрисою***. Вона відокремлює на фазовій площині області з різними типами фазових траєкторій.

Коли енергія маятника $E > mgl$, фазова крива (крива 3 на Рис.18) є незамкненою періодичною лінією. За таких значень енергії маятник буде безперервно обертатися навколо точки O (Рис.17).

Введемо новий узагальнений імпульс

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p d\varphi, \qquad (32.10)$$

де межі інтегрування визначаються областю зміни координати φ за період (тобто для кривих типу (a) на Рис.16 – у межах замкненої фазової траєкторії, а для кривих типу ($б$) на Рис.16 – у межах періоду). Для математичного маятника (32.10) має вигляд:

$$I = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\varphi_1}\sqrt{2m(E + mgl\cos\varphi)}d\varphi, \quad E \le mgl. \tag{32.11}$$

де кут φ_1 визначається умовою (32.9), або вигляд

$$I = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2m(E + mgl\cos\varphi)}d\varphi, \quad E \ge mgl. \tag{32.12}$$

Інтеграли (32.11), (32.12) залежать тільки від енергії системи

$$I = I(E), \tag{32.13}$$

тобто від її функції Гамільтона H':

$$H' = H'(I) = E. \tag{32.14}$$

Твірна функція канонічного перетворення до нового імпульсу I та нової функції Гамільтона H' (29.16) є скорочена дія

$$S(\varphi, I) = \int_0^{\varphi} p d\varphi = l\int_0^{\varphi}\sqrt{2m(E + mgl\cos\varphi)}d\varphi. \tag{32.15}$$

Імпульс (32.10) має розмірність дії і називається ***дією***. Згідно з (29.18) нова координата

$$Q = \frac{\partial S}{\partial I} \tag{32.16}$$

є безрозмірною, оскільки як твірна функція, так і новий імпульс мають розмірність дії.

Канонічні рівняння (29.3) для нових змінних такі:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial I}. \tag{32.17}$$

Нова функція Гамільтона H' (32.14) не залежить від нової координати Q (ця координата – циклічна), тому

$$I = const. \tag{32.18}$$

У другому рівнянні (32.17) похідна $\dfrac{\partial H'}{\partial I}$ не залежить від часу. Його розв’язок:

$$Q = \omega(I)t + q_0, \quad q_0 = const, \tag{32.19}$$

де $\omega(I)$ – частота нелінійних коливань математичного маятника.

Зміна твірної функції (32.15) на періоді руху дорівнює

$$\Delta S = \oint p d\varphi = 2\pi I\ . \tag{32.20}$$

Відповідно, зміна нової координати на періоді

$$\Delta Q = \frac{\partial \Delta S}{\partial I} = 2\pi\ . \tag{32.21}$$

Це виправдовує назву нової координати Q – ***кут***.

Визначимо частоту нелінійних коливань маятника $\omega(I)$. Введемо параметр κ:

$$\kappa^2 = \frac{1}{2\omega_0^2}\left(H' + \omega_0^2\right), \quad \omega_0^2 = mgl\,, \tag{32.22}$$

який може змінюватися від 0 до ∞ і на сепаратрисі (крива 2 Рис.18) дорівнює одиниці. Якщо замість змінної φ у (32.11) ввести змінну ξ співвіношенням

$$\kappa \sin\xi = \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \kappa \le 1\,, \tag{32.23}$$

з урахуванням (32.11) знайдемо

$$I(H') = \frac{8\omega_0 l\sqrt{m}}{\pi}\left\{E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right) - \left(1-\kappa^2\right)F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)\right\}, \quad \kappa \le 1\,. \tag{32.24}$$

Аналогічно, після заміни у (32.12)

$$\sin\xi = \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \kappa \ge 1\,, \tag{32.25}$$

маємо результат інтегрування:

$$I(H') = \frac{8\omega_0 l\kappa\sqrt{m}}{\pi}E\left(\frac{\pi}{2};\frac{1}{\kappa}\right), \quad \kappa \ge 1\,. \tag{32.26}$$

У (32.24), (32.26) $F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)$ та $E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)$ – повні еліптичні інтеграли, відповідно, першого та другого роду:

$$F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}; \quad E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\ . \tag{32.27}$$

Згідно з (32.17), (32.19) частота нелінійних коливань

$$\omega(I) = \frac{\partial H'}{\partial I} = \left(\frac{\partial I}{\partial H'}\right)^{-1}. \tag{32.28}$$

З урахуванням похідних від еліптичних інтегралів (32.27)

$$\frac{dF}{d\kappa}=\frac{1}{\kappa}\left(\frac{E}{1-\kappa^2}-F\right),\quad \frac{dE}{d\kappa}=\frac{1}{\kappa}(E-F),$$

де у функцій $F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)$ та $E\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)$ аргументи не виписані, знайдемо:

$$\omega(I)=\frac{\pi\omega_0}{2l\sqrt{m}}\begin{cases}\dfrac{1}{F\left(\frac{\pi}{2};\kappa\right)}, & \kappa\le 1\\ \dfrac{\kappa}{F\left(\frac{\pi}{2};\frac{1}{\kappa}\right)}, & \kappa\ge 1\end{cases}. \tag{32.29}$$

Твірна функція (32.15) з урахуванням підстановок (32.23), (32.25) матиме вигляд

$$S(\varphi,I)=4\omega_0\, l\sqrt{m}\begin{cases}E(\xi;\kappa)-\left(1-\kappa^2\right)F(\xi;\kappa), & \kappa\le 1\\ \kappa\, E\left(\xi;\frac{1}{\kappa}\right), & \kappa\ge 1\end{cases}. \tag{32.30}$$

Траєкторія руху $t=t(\varphi)$ визначається співвідношеннями (32.16), (32.15), (32.30). Швидкість маятника

$$\dot{\varphi}=\frac{p}{m}=\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial\varphi}=\frac{2\omega_0}{l\sqrt{m}}\begin{cases}\kappa\cos\xi, & \kappa\le 1\\ \sqrt{\kappa^2-\sin^2\xi}, & \kappa\ge 1\end{cases}. \tag{32.31}$$

На сепаратрисі, де

$$\dot{\varphi}=\frac{2\omega_0}{l\sqrt{m}}\cos\frac{\varphi}{2},$$

інтегрування за початковою умовою $\varphi(0)=0$ дає

$$\frac{\omega_0}{l\sqrt{m}}t=\ln tg\frac{\varphi+\pi}{4},$$

тобто

$$\varphi=4\,arc\,tg\, e^{\frac{\omega_0}{l\sqrt{m}}t}-\pi.$$

Звідси швидкість маятника

$$\dot{\varphi}=\frac{2\omega_0}{l\sqrt{m}\,ch\left(\frac{\omega_0}{l\sqrt{m}}t\right)}. \tag{32.32}$$

Таким чином, канонічне перетворення до нової функції Гамільтона H' (32.1) надає можливість визначити власні нелінійні частоти ω_a (32.28) механічної системи. Змінні „дія-кут” I_a, Q_a

корисні тим, що для визначення частот ω_a (32.28) не обов'язково проводити повне дослідження механічної системи, достатньо тільки відокремити відповідні ступені вільності.

Механіка суцільних середовищ

У класичній механіці розглядається рух систем із скінченим числом ступенів вільності. Наприклад, тверде тіло, що складене з будь-якої кількості частинок, є системою з шістьма ступенями вільності. Коли розглядаються рухи, складніші, ніж у твердому тілі (пружні коливання, деформації та ін.), необхідно розглядати тіло або як систему точкових частинок, або як суцільне середовище, втрачаючи при цьому частину інформації про рухи окремих частинок. Для будь-якого реального середовища, яке містить у собі число Авогадро атомів або молекул, немає ніякого сенсу розглядати систему 10^{23} диференціальних рівнянь руху з відповідною кількістю початкових умов, оскільки, по-перше, таку кількість умов практично визначити неможливо, по-друге, ніяка ЕОМ не зможе проаналізувати таку кількість рівнянь. Отже використання тієї чи іншої моделі суцільного середовища дозволяє спростити задачу за рахунок огрублювання методів опису, тобто усереднення частки процесів, які відбуваються у середовищі. Фактично процедура усереднення виділяє достатньо малі, але макроскопічні області середовища і враховує швидкі процеси, які у них відбуваються. Це дозволяє дослідити повільні процеси у областях, великих порівняно з областями усереднення за допомогою рівнянь для усереднених характеристик середовища. Іншими словами, замість розгляду рухів окремих атомів або молекул у моделях суцільного середовища частина простору, заповнена середовищем, наділяється додатними скалярними, векторними та тензорними характеристиками – полями (функціями координат та часу). Сама процедура усереднення виконується методами статистичної фізики і дозволяє зв'язати усереднені характеристики речовини з властивостями атомів або молекул, які її складають.

Якщо серед характеристик середовища зустрічаються тензорні величини, відповідні рівняння для середовища записують у тензорній формі. На протязі цієї частини використовується така тензорна форма запису, де тензорні індекси визначають декартові компоненти відповідних тензорів[7]. Однак при обчисленні характеристик середовища може статися доцільним використання криволінійних координат, які відповідали б внутрішній симетрії диференціальних рівнянь, що описують середовище, і знаходилися у процесі розв'язання задачі. Тому для остаточних рівнянь розгляданих середовищ приведена також форма запису у довільних криволінійних координатах, коли треба відрізняти верхні та нижні тензорні індекси, а також враховувати властивості коваріантного диференціювання.

33. Рівняння руху суцільного середовища

У механіці рідин та газів широко використовується поняття ***„рідкої частинки"***. Цим терміном визначають малий об'єм суцільного середовища, який у процесі руху деформується, але маса якого не змішується з навколишнім середовищем. При вивченні рівноваги або будь-яких рухів рідин та газів рідка частинка розглядається як матеріальний об'єкт, який підпорядковується усім законам механіки.

Для характеристики розподілу маси у просторі, заповненому рідиною або газом, звичайно використовують величину, яку називають густиною. Середнє значення густини середовища у деякому малому об'ємі визначається як відношення маси Δm, яка міститься у цьому об'ємі, до величини об'єму ΔV:

$$\rho_{cep} = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{33.1}$$

Замість середнього значення густини часто використовується величина, що називається ***густиною середовища*** у наданій точці:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \tag{33.2}$$

де об'єм ΔV містить у собі цю точку. Відповідно, елемент маси dm середовища пов'язаний з елементом об'єму dV, де знаходиться ця маса, співвідношенням:

[7] Для декартових компонент тензорів не треба відрізняти верхні та нижні тензорні індекси, бо метричний тензор g_{ik} тривимірного простору у декартових координатах – це просто символ Кронекера (19.6): $g_{ik} = \delta_{ik}$. Тому усі індекси для декартових компонент тензорів записують як нижні.

$$dm = \rho\, dV\,. \qquad (33.3)$$

Під час руху суцільного середовища маса його елемента dm (рідкої частинки) залишається незмінною. У загальному випадку густина представляє собою скалярну функцію координат та часу

$$\rho = \rho\left(\vec{r}, t\right). \qquad (33.4)$$

Для опису рухів суцільного середовища введемо векторне поле $\vec{\upsilon}\left(\vec{r}, t\right)$ – ***швидкість частинок суцільного середовища***, які проходять через точку простору $\vec{r}$ у момент часу t. Швидкість $\vec{\upsilon}\left(\vec{r}, t\right)$ так само, як і густина $\rho\left(\vec{r}, t\right)$, не відноситься до будь-яких частинок окремо, а надає усереднену характеристику середовища в заданій точці простору у заданий момент часу.

Оскільки частинки, з яких складається суцільне середовище, підпорядковуються рівнянням Ньютона, подібні рівняння існують і для суцільного середовища. Вони враховують, що зміна імпульсу $\vec{P}$ сукупності частинок у одиницю часу визначаються силами $\vec{F}$, які діють на ці частинки:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \qquad (33.5)$$

а зміна моменту імпульсу $\vec{M}$ у одиницю часу – моментом сил $\vec{K}$:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}\,. \qquad (33.6)$$

Розглянемо рівняння (33.5) для елемента об'єму суцільного середовища dV, який складається з одних і тих самих рідких частинок. Сили, які діють на цей елемент об'єму, можна підрозділити на два види: об'ємні та поверхневі.

Об'ємні сили – це сили, які діють на усі частинки усередині об'єму

$$d\,\vec{F}^{об'єм} = \vec{f}\,dm = \vec{f}\,\rho\,dV\,, \qquad (33.7)$$

де $\vec{f}$ – густина сил (сума сил, які діють на одиницю маси: $\vec{f} = \dfrac{d\,\vec{F}^{об'єм}}{dV}$). Прикладом об'ємної сили є сила ваги

$$d\,\vec{F}^{об'єм} = \vec{g}\,dm, \quad \vec{f} = \vec{g}\,, \qquad (33.8)$$

де $\vec{g}$ – прискорення сили ваги. Співвідношення (33.7) запишемо також у тензорній формі:

$$d\,F_i^{об'єм} = f_i\,dm = f_i\,\rho\,dV\,. \qquad (33.9)$$

Поверхневі сили – це сили, які діють на виділений об’єм суцільного середовища з боку сусідніх об’ємів. У загальному випадку сила, з якою наданий об’єм діє на сусідній, який стикається з ним, характеризується трьома складовими: нормальною та двома дотичними. Компоненти поверхневих сил найкраще визначити у тензорній формі:

$$dF_i^{поверх} = p_{ik} d\sigma_k = p_{ik} n_k d\sigma . \qquad (33.10)$$

Тут p_{ik} – ***тензор механічних напружень***, вектор $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$ характеризує елемент поверхні, вздовж якої стикаються два об’єми, $\vec{n}$ – одиничний вектор, перпендикулярний до поверхні, $d\sigma$ – величина площини поверхні. У цій формулі, а також в усіх подальших формулах з тензорними величинами за повторюваними індексами, як це прийнято у тензорному аналізі, виконується підсумовування (правило Ейнштейна):

$$p_{ik} n_k = p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3 . \qquad (33.11)$$

Повна сила F_i, яка діє на виділений об’єм V та поверхню Σ_V, що його обмежує,

$$F_i = F_i^{об'єм} + F_i^{поверх} = \int\limits_V f_i \rho \, dV + \oint\limits_{\Sigma_V} p_{ik} n_k d\sigma . \qquad (33.12)$$

Останній інтеграл за теоремою Остроградського-Гаусса можна перетворити у об’ємний. У результаті маємо

$$F_i = \int\limits_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_{\hat{e}}} \right) dV . \qquad (33.13)$$

Щоб записати рівняння руху суцільного середовища (33.5), розглянемо елемент об’єму середовища з масою dm, який знаходиться в точці $\vec{r}$ у момент часу t і має швидкість $\vec{\upsilon}(\vec{r}, t)$. Імпульс цього елементу дорівнює $\vec{\upsilon}\, dm$. За час dt цей елемент об’єму переміститься у точку $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\upsilon}\, dt$ і буде мати швидкість

$$\vec{\upsilon}(\vec{r}\,', t') = \vec{\upsilon}(\vec{r} + \vec{\upsilon}\, dt, t + dt) \approx \vec{\upsilon}(\vec{r}, t) + \upsilon_i \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x_i} dt + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} dt =$$

$$= \vec{\upsilon}(\vec{r}, t) + \left(\left(\vec{\upsilon} \vec{\nabla} \right) \vec{\upsilon} + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} \right) dt . \qquad (33.14)$$

Похідна

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon} \vec{\nabla} \right) \vec{\upsilon} , \qquad (33.15)$$

яка називається ***субстанційною похідною***, характеризує зміну швидкості рідкої частинки, яка зміщується у просторі. Перший внесок у (33.15) називається ***локальною похідною*** і характеризує зміну параметрів руху у деякій фіксованій точці простору за часом. Другий внесок (***конвективна похідна***) описує зміну параметрів руху рідкої частинки внаслідок її переміщення з однієї точки простору в іншу.

У декартових змінних диференціальний оператор $\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)$, що діє на $\vec{\upsilon}$ у (33.15), має вигляд:

$$\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = \upsilon_x \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial z}, \qquad (33.16)$$

У разі використання довільних криволінійних координат x^1, x^2, x^3 в усіх векторних та тензорних величинах треба відрізняти верхні та нижні індекси, оскільки компоненти метричного тензора g_{ik} тривимірного простору у криволінійних координатах залежать від координат, а також замість звичайних частинних похідних треба використовувати коваріантні[8]. Тому i-та компонента виразу (33.16) у довільних криволінійних координатах матиме вигляд

$$\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\upsilon_i = \upsilon^k \upsilon_{i;k}, \qquad (33.17)$$

де коваріантна похідна $\upsilon_{i;k}$ позначена індексом, відокремленим крапкою з комою:

---

[8] З математичної точки зору, перш, ніж вводити у просторі якісь векторні або тензорні поля, треба зробити цей простір векторним, тобто у кожній точці простору треба ввести систему незалежних векторів – базис (у тривимірному просторі це будь-які три не колінеарні, не компланарні вектори). Така процедура дозволяє досліджувати, яким чином змінюються векторні або тензорні поля у різних точках простору. Зміна напрямів базисних векторів при переході від однієї точки простору до іншої враховується у диференціальній геометрії за допомогою коваріантного диференціювання. Властивості коваріантного диференціювання залежать від вибору геометрії розгляданого простору. У найпростішому випадку припускається, що простір коваріантно постійний, тобто коваріантна похідна метричного тензора g_{ik} простору дорівнює нулю

$$g_{ik;n} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n} - \Gamma^m_{in} g_{mk} - \Gamma^m_{kn} g_{im} = 0$$

та коефіцієнти $\Gamma^m_{in} = \Gamma^m_{ni}$ – це символи Кристофеля. Таку геометрію називають рімановою. Частинним випадком ріманового простору є евклідів простір, у якому тензор кривини Кристофеля-Рімана дорівнює нулю:

$$R_{iknm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^n}\right) + g_{rs}\left(\Gamma^r_{im}\Gamma^s_{kn} - \Gamma^r_{in}\Gamma^s_{km}\right) = 0.$$

$$\upsilon_{i;k} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} - \Gamma^n_{ik}\upsilon_n, \qquad (33.18)$$

$$\Gamma^n_{ik} = \frac{1}{2} g^{nm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) \qquad (33.19)$$

– символи Кристофеля, g_{ik} – метричний тензор тривимірного простору у криволінійних координатах x^1, x^2, x^3, двічі коваріантний метричний тензор g_{ik} пов'язаний з двічі контраваріантним метричним тензором g^{ik} співвідношенням:

$$g_{in}g^{kn} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \qquad (33.20)$$

Зміна імпульсу маси dm за одиницю часу dt визначається співвідношенням

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{dm\vec{\upsilon}(\vec{r}\,', t') - dm\vec{\upsilon}(\vec{r}, t)}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} dm. \qquad (33.21)$$

Таким чином швидкість зміни імпульсу рідких частинок у об'ємі V

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \rho\left(\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\right) dV. \qquad (33.22)$$

У відповідності з рівнянням (33.6) ця величина дорівнює силі (33.12), яка діє на об'єм V:

$$\int_V \rho\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\upsilon_i\right) dV = \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right) dV. \qquad (33.23)$$

Оскільки об'єм V – довільний, з (33.23) випливає:

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\upsilon_i = f_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (33.24)$$

Це і є рівняння руху суцільного середовища. Його називають ***диференціальним рівнянням руху у напруженнях***.

Покажемо, що за деяких припущень рівняння (33.6) еквівалентно симетричності тензора напружень p_{ik}:

$$p_{ik} = p_{ki}. \qquad (33.25)$$

Для цього розглянемо момент імпульсу елементу об'єму з масою dm, який знаходиться в точці $\vec{r}$ у момент часу t:

$$\vec{M}(t) = [\vec{r}, \vec{\upsilon}]dm. \qquad (33.26)$$

У момент часу $t' = t + dt$ цей елемент об'єму буде знаходитися в точці $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\upsilon}\,dt$, його момент імпульсу буде дорівнювати

$$\vec{M}(t') = [\vec{r}\,', \vec{\upsilon}(\vec{r}\,', t')]dm. \qquad (33.27)$$

Зміна цього моменту імпульсу за одиницю часу

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{[\vec{r}\,', \vec{\upsilon}(\vec{r}\,', t')] - [\vec{r}, \vec{\upsilon}(\vec{r}, t)]}{dt} dm. \qquad (33.28)$$

Для будь-якого об'єму V

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \int_V \rho \left[\vec{r}, \left(\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla})\vec{\upsilon} \right) \right] dV. \qquad (33.29)$$

Згідно з формулою (33.6) ця величина дорівнює моменту прикладених до об'єму зовнішніх сил (33.7) та (33.10):

$$\vec{K} = \int_V [\vec{r}, d\,\vec{F}^{об'єм}] + \oint_{\Sigma_V} [\vec{r}, d\vec{F}^{поверх}], \qquad (33.30)$$

тобто

$$\int_V \rho[\vec{r}, \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}]dV = \int_V [\vec{r}, d\,\vec{F}^{об'єм}] + \oint_{\Sigma_V} [\vec{r}, d\vec{F}^{поверх}]. \qquad (33.31)$$

Для будь-якої компоненти цього рівняння (напр., компоненти x) маємо:

$$\int_V \rho \left(y\frac{d\upsilon_z}{dt} - z\frac{d\upsilon_y}{dt} \right) dV =$$
$$= \int_V \rho \left(y\, d\,F_z^{об'єм} - zd\,F_y^{об'єм} \right) dV + \oint_{\Sigma_V} \left(ydF_z^{поверх} - zdF_y^{поверх} \right). \qquad (33.32)$$

Якщо підставити сюди (33.9), (33.10) та (33.24) після скорочень внесків з f_i знайдемо

$$\int_V \left(y\frac{\partial p_{zk}}{\partial x_k} - z\frac{\partial p_{yk}}{\partial x_k} \right) dV = \oint_{\Sigma_V} \left(yp_{zk}n_k - zp_{yk}n_k \right) d\sigma. \qquad (33.33)$$

За теоремою Остроградського-Гаусса поверхневий інтеграл можна перетворити у об'ємний

$$\int_V \left(\frac{\partial\, yp_{zk}}{\partial x_k} - \frac{\partial zp_{yk}}{\partial x_k} \right) dV. \qquad (33.34)$$

Після скорочення однакових внесків у (33.33) будемо мати

$$\int_V \left(p_{zy} - p_{yz} \right) dV = 0. \qquad (33.35)$$

Оскільки об'єм V тут був довільний, з (33.35) випливає

$$p_{zy} = p_{yz}.$$

Інші співвідношення (33.25) отримаємо, розглянувши компоненти y та z рівняння (33.31). Таким чином, закон зміни моменту імпульсу суцільного середовища (33.6) проявляється у властивостях симетрії тензора напружень p_{ik} (33.25).

Відмітимо, що будь-який тензор другого рангу π_{ik} можна тотожно представити у вигляді суми симетричного та антисиметричного внесків, де симетричний внесок у свою чергу складається з діагональної та недіагональної частин:

$$\pi_{ik} = \frac{1}{3}\delta_{ik}\pi_{ll} + \left(\frac{\pi_{ik} + \pi_{ki}}{2} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\pi_{ll} \right) + \frac{\pi_{ik} - \pi_{ki}}{2}. \qquad (33.36)$$

Кожний з них при переході до нової координатної системи перетворюється незалежно: згортка $\pi_{ll} = \pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33}$ – скаляр (форма скаляра не змінюється при координатних перетвореннях), симетричний внесок – через симетричний, антисиметричний – через антисиметричний. Тензор механічних напружень p_{ik} також можна представити у формі (33.36). Перший внесок у тензорі p_{ik} має скаляр, подібний тиску у законі Паскаля (але з протилежним знаком). У ідеальній рідині він лише один – див. далі п.36. Другий внесок з'являється у середовищах, які чинять опір зміні форми при постійному об'ємі. Прикладом суцільного середовища, де тензор p_{ik} має перший і другий внески, є в'язка рідина (див. п.39). Третій внесок взагалі, як показано вище, дорівнює нулю.

У довільних криволінійних координатах рівняння руху суцільного середовища (33.24) матиме вигляд:

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon^k\, \upsilon_{i;k} = f_i + \frac{1}{\rho} p^k_{i;k}, \qquad (33.37)$$

де $\upsilon_{i;k}$ визначається співвідношенням (33.18),

$$p^k_{i;k} = \frac{\partial p^k_i}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} p^k_m + \Gamma^k_{mk} p^m_i, \quad p^k_i = p_{in} g^{kn}. \qquad (33.38)$$

Задача 33.1. Знайти вигляд диференціального оператора $\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)$, що діє на коваріантні компоненти вектора $\vec{\upsilon}$ у циліндричних та сферичних координатах.

34. Закон збереження маси. Рівняння неперервності

Закон збереження маси для ізольованої системи проявляється у тому, що маса m такої системи залишається постійною під час руху. Якщо система не ізольована і має постійний за величиною об'єм, через поверхню цього об'єму можуть виходити або входити частинки. Зміна маси об'єму у одиницю часу буде дорівнювати

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \,. \tag{34.1}$$

Кількість частинок, які входять всередину об'єму V, або виходять з нього за одиницю часу, може бути визначена за допомогою потоку маси, що проходить крізь поверхню Σ_V, яка обмежує об'єм V. Кількості частинок, які входять всередину об'єму V та які виходять з нього, не однакові, тому кількість маси, яка виходить за час dt зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ через елемент поверхні $d\vec{\sigma}$, дорівнюватиме $\rho\vec{\upsilon}dtd\vec{\sigma}$. Зміна маси середовища у цьому об'ємі за одиницю часу буде дорівнювати

$$\frac{dm}{dt} = -\oint_{\Sigma_V} \rho \vec{\upsilon}\, d\vec{\sigma} \,, \tag{34.2}$$

тобто зменшення маси усередині об'єму V супроводжується потоком маси крізь поверхню назовні (цьому напряму руху частинок відповідає знак „мінус" у правій частині (34.2)). Формула (34.2) є ***закон збереження маси у інтегральній формі***. Величина

$$\vec{j} = \rho\vec{\upsilon} \tag{34.3}$$

називається ***густиною потоку маси***. Закон збереження (34.2) подібний до закону збереження заряду у електродинаміці: зміна заряду у об'ємі V супроводжується потоком заряду через поверхню, що обмежує цей об'єм.

Якщо зміна маси усередині об'єму супроводжується тільки зміною густини, (34.2) можна переписати у вигляді:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_{\Sigma_V} \vec{j}\, d\vec{\sigma} \tag{34.4}$$

або, за теоремою Остроградського-Гаусса,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \frac{\partial j_k}{\partial x_k} dV \,. \tag{34.5}$$

Оскільки об'єм V у цій формулі довільний, знаходимо ***закон збереження маси у диференціальній формі (рівняння неперервності)***:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0. \qquad (34.6)$$

Якщо середовище нестисливе, тобто $\rho = const$, рівняння (34.6) має вигляд:

$$div\,\vec{\upsilon} = 0. \qquad (34.7)$$

У довільних криволінійних координатах x^1, x^2, x^3 вираз $div\,\vec{j}$ представляє собою коваріантну похідну $j_{i;k}$ зі згорткою по індексах

$$div\,\vec{j} = j_{i;k} g^{ik} = j^i_{;i}, \qquad (34.8)$$

де

$$j_{i;k} = \frac{\partial j_i}{\partial x_k} - \Gamma^n_{ik} j_n, \quad j^i_{;i} = \frac{\partial j^i}{\partial x_i} + \Gamma^i_{ik} j^k, \qquad (34.9)$$

Рівняння неперервності (34.6) у довільних криволінійних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + j^i_{;i} = 0. \qquad (34.10)$$

Задача 34.1. Записати рівняння неперервності у циліндричних та сферичних координатах.

35. Закон збереження енергії. Повна система рівнянь руху суцільного середовища

Якщо вважати, що тензор напружень p_{ik} у (33.24) залежить тільки від густини ρ та швидкості $\vec{\upsilon}$, система рівнянь (33.24) та (34.6) є замкненою і повністю характеризує рухи суцільного середовища. Однак треба мати на увазі, що у реальному середовищі мають місце дисипативні процеси, тобто внутрішня енергія частково перетворюється у теплоту, змінюється температура середовища, і характер руху у системі теж може змінитися. Такі системи характеризуються ще однією скалярною функцією – температурою $T = T(\vec{r}, t)$, для якої необхідно мати ще одне рівняння. Це рівняння можна знайти, виходячи з першого закону термодинаміки (зміна енергії наданого об'єму дорівнює припливу теплоти внаслідок дисипативних процесів та роботі зовнішніх сил над елементами об'єму):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dA}{dt}. \qquad (35.1)$$

Рівняння (35.1) є узагальненням закону збереження енергії на системи, які складаються з великої кількості частинок і не можуть бути описані у рамках класичної механіки. Визначення енергії E та роботи A у формулі (35.1) відрізняються від прийнятих у класичній механіці, хоча і засновані на механічних поняттях. Величини Q – кількості теплоти – у класичній механіці не існує взагалі. Послідовно її можна визначити лише методами статистичної фізики.

Повна енергія рідких частинок у об'ємі V складається із суми кінетичної T_k та внутрішньої енергії U:

$$E = T_k + U. \qquad (35.2)$$

Кінетична енергія T_k макроскопічного колективного руху в об'ємі V

$$T_k = \int_V \frac{1}{2}\upsilon^2 dm = \int_V \frac{\rho\upsilon^2}{2} dV. \qquad (35.3)$$

Внутрішня енергія U представляє собою усереднену за часом потенціальну енергію взаємодії частинок середовища між собою. У термодинаміці вона пов'язується з питомою теплоємністю середовища c_V та температурою T:

$$U = \int_V u dm = \int_V \rho c_V T dV. \qquad (35.4)$$

Таким чином, повна енергія рідких частинок у об'ємі V може бути записана у вигляді:

$$E = \int_V \rho\varepsilon dV, \qquad (35.5)$$

де $\varepsilon = \dfrac{\upsilon^2}{2} + u$ – енергія одиниці маси суцільного середовища. Зміна кінетичної енергії маси dm у одиницю часу визначається аналогічно (33.21), (33.22)

$$\frac{dT_k}{dt} = \int_V \rho\upsilon_i \frac{d\upsilon_i}{dt} dV = \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right) \upsilon_i dV, \qquad (35.6)$$

де враховані співвідношення (33.15), (33.24). Так само, зміна повної енергії маси dm у одиницю часу дорівнює

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \rho \frac{d\varepsilon}{dt} dV = \int_V \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \upsilon_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) dV . \qquad (35.7)$$

Робота зовнішніх сил над елементами об'єму V у одиницю часу (потужність) складається з внесків об'ємних (33.9) та поверхневих (33.10) сил, помножених скалярно на швидкість $\vec{\upsilon}$:

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \rho f_i \upsilon_i dV + \oint_{\Sigma_V} p_{ik} n_k \upsilon_i d\sigma . \qquad (35.8)$$

Поверхневий інтеграл можна перетворити у об'ємний:

$$\oint_{\Sigma_V} p_{ik} n_k \upsilon_i d\sigma = \int_V \frac{\partial p_{ik} \upsilon_i}{\partial x_k} dV = \int_V \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \upsilon_i dV + \int_V p_{ik} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} dV . \qquad (35.9)$$

В останньому інтегралі з врахуванням симетрії p_{ik} (33.25) запишемо

$$p_{ik} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} = p_{ik} \upsilon_{ik} , \quad \upsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} \right). \qquad (35.10)$$

Таким чином, потужність зовнішніх сил має вигляд

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right) \upsilon_i dV + \int_V p_{ik} \upsilon_{ik} dV . \qquad (35.11)$$

Зміна енергії в об'ємі V, зумовлена потоком теплоти через його поверхню Σ_V, може бути записана у вигляді інтегралу

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_{\Sigma_V} \vec{q} d\vec{\sigma} = -\int_V div\, \vec{q}\, dV , \qquad (35.12)$$

де $\vec{q}$ – ***густина потоку теплоти***. Із спостережень відомо, що

$$\vec{q} = -\gamma \vec{\nabla} T , \qquad (35.13)$$

де γ – коефіцієнт теплопровідності.

Співвідношення (35.7), (35.11), (35.12), підставлені у перший закон термодинаміки (35.1), з врахуванням рівняння неперервності (34.6) дозволяють записати закон збереження енергії суцільного середовища у вигляді (***закон збереження енергії у інтегральній формі***):

$$\int_V \frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} dV = -\oint_{\Sigma_V} \vec{S} d\vec{\sigma} + \int_V \rho \vec{f}\, \vec{\upsilon} dV \qquad (35.14)$$

– зміна енергії у об'ємі V суцільного середовища супроводжується потоком енергії через поверхню Σ_V, що обмежує цей об'єм, та роботою об'ємних сил усередині об'єму. ***Густина потоку енергії*** (***вектор Умова***[9])

$$S_i = \rho\left(\frac{\upsilon^2}{2} + u\right)\upsilon_i - p_{ik}\upsilon_k + q_i, \qquad (35.15)$$

складається з внесків конвективного переносу енергії $\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2} + u\right)\upsilon_i$ за рахунок макроскопічних рухів суцільного середовища, роботи поверхневих сил $-p_{ik}\upsilon_k$ та переносу теплоти q_i. З (35.14) випливає ***закон збереження енергії суцільного середовища у диференціальній формі***:

$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + div\,\vec{S} = \rho\vec{f}\,\vec{\upsilon}. \qquad (35.16)$$

Після підстановки (35.2), (35.4), (35.6), (35.11), (35.12) у (35.1) з врахуванням довільності об'єму V будемо мати рівняння

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)u\right) = div\left(\gamma\vec{\nabla}T\right) + p_{ik}\upsilon_{ik}. \qquad (35.17)$$

Рівняння (33.24), (34.6), (35.17) (з субстанційними похідними (33.15))

$$\frac{d\upsilon_i}{dt} = f_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}, \qquad (35.18а)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\,\vec{\upsilon} = 0, \qquad (35.18б)$$

$$\rho\frac{du}{dt} = div\left(\gamma\,\vec{\nabla}T\right) + p_{ik}\upsilon_{ik}. \qquad (35.18в)$$

представляють собою ***повну систему рівнянь руху суцільного середовища***, якщо її доповнити рівняннями, які пов'язують величини u, γ, p_{ik} з термодинамічними параметрами ρ та T (одне з таких співвідношень – (35.4)). Форма цих рівнянь визначає модель суцільного середовища (твердого тіла, рідини або газу).

---

9 Вектор $\vec{S} = (\frac{\rho\upsilon^2}{2} + p)\vec{\upsilon}$, який представляє собою густину потоку енергії ідеальної нестисливої рідини, вперше ввів М.О.Умов у 1873 р. (Одеса). Тут p – тиск (див. далі п.36).

Далі розглянемо як приклади суцільного середовища ідеальну та в'язку рідини.

36. Ідеальна рідина

Серед суцільних середовищ важливе місце займають рідини та гази. Механіка рідин та газів (***гідромеханіка***) вивчає рівновагу та рух рідких та газоподібних середовищ, їх взаємодію між собою та з твердими тілами. Як і інші області механіки, вона підрозділяється на статику, кінематику та динаміку. Частина гідродинаміки, яка вивчає умови рівноваги рідин та газів називається ***гідростатикою***. ***Кінематика*** рідин та газів вивчає їх рух у часі не цікавлячись причинами, які призводять до цього руху. Предметом вивчення ***гідродинаміки*** є рух одних частин рідин або газів відносно інших у зв'язку з їх взаємодією. Основні фізичні властивості рідин та газів – безперервність (суцільність) та рухливість (текучість) – дозволяють використовувати у гідродинаміці математичні методи, засновані на використовуванні неперервних функцій, зокрема детально розроблену теорію диференціальних та інтегральних рівнянь.

Найпростіша модель рідини – це ***ідеальна рідина***, у якій відсутнє внутрішнє тертя та теплопровідність. При русі ідеальної рідини дотичних сил тертя немає і взаємодія між об'ємами, які стикаються, зводиться до дії нормальних поверхневих сил, тобто недіагональні компоненти тензора напружень p_{ik} (33.10) у будь-який точці ідеальної рідини повинні дорівнювати нулю:

$$p_{ik} = 0, \quad i \neq k. \qquad (36.1)$$

Така властивість тензора напружень може бути інваріантною відносно поворотів координатної системи тільки тоді, коли усі діагональні компоненти p_{ik} рівні між собою. Це має місце, якщо тензор перетворюється на скаляр, оскільки скаляр ніяк не змінюється при поворотах координатної системи. Тиск, перпендикулярний будь-якому елементу поверхні, яким би чином вона б не була орієнтована у просторі, залишається одним і тим же. Коли рідина покоїться, це має місце завжди (закон Паскаля). Для ідеальної рідини ця властивість зберігається і при русі, тобто,

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}, \qquad (36.2)$$

де p – тиск у рідині. Система рівнянь (35.18) у випадку ідеальної рідини спрощується:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}grad\,p, \qquad (36.3а)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\rho\vec{\upsilon}=0, \qquad (36.3б)$$

де об'ємна сила $\vec{f}$ розглядається як зовнішня, наперед задана. Перше з цих рівнянь, яке називається ***рівнянням Ейлера***, є одним з основних рівнянь гідродинаміки. Оскільки у рівняннях (36.3) п'ять невідомих функцій ρ, $\vec{\upsilon}$, p, цю систему треба доповнити ще одним рівнянням. Врахуємо, що завдяки молекулярним рухам теплота передається вздовж середовища досить повільно. Тому окремі елементи середовища, які рухаються з більшою швидкістю, не встигають обмінятися теплотою, і основний обмін енергією між такими елементами відбувається шляхом виконання роботи стискування або розширення. Відмітимо, що у реальному середовищі існують також інші канали теплопередачі: внутрішнє тертя (в'язкість), хімічні реакції і т.д. Якщо цього не відбувається, течію можна вважати ізоентропійною (адіабатичною).

Якщо ентропія однакова вздовж усього середовища,

$$s=const, \qquad (36.4)$$

рівняння адіабатичного процесу задає тиск як функцію густини

$$p=p\left(\rho\right). \qquad (36.5)$$

У більш загальному випадку треба записувати умови постійності ентропії елемента маси dm:

$$\frac{d}{dt}\left(sdm\right)=0, \qquad (36.6)$$

де s – ентропія одиниці маси. Оскільки для елемента рідкого середовища величина dm – стала, з (36.6) випливає

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\partial s}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)s=0. \qquad (36.7)$$

Рівняння (36.3а), (36.3б) та (36.5) або (36.7) представляють повну систему рівнянь, які описують рух ідеальної стисливої рідини.

До рівнянь руху ідеальної рідини треба додати крайові умови, а якщо течія нестаціонарна, ще й початкові умови у деякий момент часу t_0. Крайові умови повинні виконуватися на поверхнях, що обмежують рідину. Для ідеальної рідини це просто умови, що рідина не може проникнути крізь тверді поверхні, з якими вона межує. Це означає, що на нерухомих стінках повинна бути нульовою нормальна до поверхні стінки компонента швидкості

$$\upsilon_n = 0. \qquad (36.8)$$

Якщо поверхня рухається, компонента υ_n повинна дорівнювати відповідній компоненті швидкості $\vec{V}^{\Sigma}$ поверхні Σ:

$$\upsilon_n = V_n^{\Sigma}. \qquad (36.9)$$

На межі між двома рідинами, які не змішуються, повинні виконуватися умови рівності тисків та рівності нормальних до поверхні розділу компонент швидкостей обох рідин:

$$p^{(1)} = p^{(2)}, \quad \upsilon_n^{(1)} = \upsilon_n^{(2)} = V_n^{\Sigma}. \qquad (36.10)$$

При цьому кожна з вказаних компонент швидкості повинна дорівнювати швидкості V_n^{Σ} нормального переміщення самої поверхні розділу Σ.

Для адіабатичних рухів ідеальної рідини рівняння Ейлера (36.3а) можна представити у декілька іншій формі. Для цього скористаємось добре відомим термодинамічним співвідношенням

$$d\omega = T ds + V_0 dp, \qquad (36.11)$$

де ω – теплова функція (ентальпія) одиниці маси ідеальної рідини, T – температура, $V_0 = \dfrac{1}{\rho}$ – питомий об'єм (об'єм одиниці маси). Оскільки $s = const$,

$$d\omega = \frac{1}{\rho} dp, \qquad (36.12)$$

тому

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = \vec{\nabla}\omega, \qquad (36.13)$$

і рівняння (36.3а) приймає вигляд

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = \vec{f} - grad\,\omega. \qquad (36.14)$$

Якщо скористатися формулою

$$\frac{1}{2} grad\,\upsilon^2 = \left[\vec{\upsilon}, rot\vec{\upsilon}\right] + \left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}, \qquad (36.15)$$

рівняння (36.14) може бути записане у вигляді

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} - \left[\vec{\upsilon}, rot\,\vec{\upsilon}\right] = \vec{f} - grad\left(\omega + \frac{\upsilon^2}{2}\right). \qquad (36.16)$$

Його називають ***рівнянням Ейлера у формі Громеки***. Крайові та початкові умови для цих рівнянь такі ж самі, як і для рівняння Ейлера.

Коли векторний добуток у лівій частині (36.16) перетворюється на нуль, система цих рівнянь значно спрощується. Це відбувається у трьох випадках:

– швидкість потоку $\vec{\upsilon}$ дорівнює нулю

$$\vec{\upsilon} = 0; \tag{36.17}$$

– вихор швидкості дорівнює нулю (безвихровий, потенціальний потік)

$$rot\,\vec{\upsilon} = 0; \tag{36.18}$$

– вектори швидкості $\vec{\upsilon}$ і вихору швидкості $rot\,\vec{\upsilon}$ колінеарні (гвинтовий рух ідеальної рідини)

$$\vec{\upsilon} \parallel rot\,\vec{\upsilon}. \tag{36.19}$$

Введемо поняття ***лінії течії*** як кривої, дотична до якої у будь-якій точці має напрям швидкості $\vec{\upsilon}$, тобто вектори елемента лінії течії $d\vec{r}$ та $\vec{\upsilon}$ паралельні. Умову паралельності цих векторів можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{\upsilon_x} = \frac{dy}{\upsilon_y} = \frac{dz}{\upsilon_z}. \tag{36.20}$$

Аналогічно, ***вихрова лінія*** у рідині вводиться таким чином, що дотична до неї паралельна вихору швидкості $rot\,\vec{\upsilon}$, тобто

$$\frac{dx}{rot_x\vec{\upsilon}} = \frac{dy}{rot_y\vec{\upsilon}} = \frac{dz}{rot_z\vec{\upsilon}}. \tag{36.21}$$

Для течії (36.19) лінії течії та вихрові лінії співпадають. Подібні лінії можуть утворюватись при обтіканні крила літака.

Застосуємо до обох частин рівняння (36.14) операцію rot. Коли об’ємна сила $\vec{f}$ потенціальна

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{36.22}$$

де ϕ – потенціальна енергія одиниці маси, рівняння (36.14) прийме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{\upsilon} - rot\left[\vec{\upsilon}, rot\,\vec{\upsilon}\right] = 0. \tag{36.23}$$

Цікаво, що у цьому рівнянні присутня тільки швидкість $\vec{\upsilon}$.

37. Закони збереження ідеальної рідини

З'ясуємо, яку форму мають закони збереження ідеальної рідини. Щоб спростити результати, припустимо, що об'ємні сили $\vec{f}$, які діють на ідеальну рідину, потенціальні (36.22).

Почнемо з ***закону збереження енергії***. Помножимо рівняння (36.3а) скалярно на $\vec{\upsilon}$. У випадку стаціонарної течії, тобто коли $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}(\vec{r})$, з лівого боку у цьому рівнянні буде субстанційна похідна (33.15): $\vec{\upsilon}\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d\upsilon^2}{dt}$. Якщо сила $\vec{f}$ не залежить явно від часу, з правого боку теж є субстанційна похідна:

$$\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\phi=\frac{d\phi}{dt}.$$

Внесок $\dfrac{1}{\rho}\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)p$ можна представити у вигляді різниці:

$$\frac{1}{\rho}\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)p=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{37.1}$$

де перший доданок з правого боку з урахуванням (36.12) дає $\dfrac{d\omega}{dt}$. Як результат, це рівняння може бути записане у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+\omega+\phi\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{37.2}$$

Розкриємо субстанційну похідну відповідно з (33.15) та врахуємо рівняння неперервності (36.3б), помножене на суму $\dfrac{\upsilon^2}{2}+\omega+\phi$. У результаті рівняння (37.2) прийме форму

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2}+\omega+\phi\right)+div\rho\vec{\upsilon}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+\omega+\phi\right)=\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{37.3}$$

Це рівняння можна записати у вигляді, аналогічному закону збереження маси (34.4), (34.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2}+u+\phi\right)+div\rho\vec{\upsilon}\left(\frac{\upsilon^2}{2}+\omega+\phi\right)=0, \tag{37.4}$$

якщо замість теплової функції ω (36.11) ввести термодинамічну енергію u та питомий об'єм $V_0=\dfrac{1}{\rho}$:

$$\omega = u + V_0 p = u + \frac{p}{\rho}. \qquad (37.5)$$

З (37.4) випливає, що густина енергії ідеальної рідини складається з трьох внесків: кінетичної енергії $\rho\frac{\upsilon^2}{2}$, внутрішньої (термодинамічної) енергії ρu та потенціальної енергії у зовнішньому полі $\rho\phi$. До густини потоку енергії входить не u, а теплова функція ω. Це позначає, що енергія не тільки переноситься з потоком речовини, але також передається від одного об'єму до другого шляхом виконання роботи при стискуванні або розріджуванні. Повний баланс
енергії складається з механічних та термодинамічних внесків.

Закон збереження енергії ідеальної рідини у інтегральній формі можна записати виходячи з (37.4) аналогічно закону збереження маси (34.2):

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(\frac{\upsilon^2}{2} + u + \phi)\right)dV = -\oint_{\Sigma_V} \rho(\vec{\upsilon}\,\vec{n})\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi\right)d\sigma. \qquad (37.6)$$

Закон збереження імпульсу в ідеальній рідині виконується, звичайно, коли зовнішня сила $\vec{f}$ дорівнює нулю. Перепишемо рівняння (36.3а) у тензорній формі

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{ik} p = 0, \qquad (37.7)$$

де, згідно з (19.6), враховано, що $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{ik} p$. Рівняння неперервності (36.3б) також запишемо у тензорній формі та помножимо на компоненту швидкості υ_i:

$$\upsilon_i\frac{\partial\rho}{\partial t} + \upsilon_i\frac{\partial}{\partial x_k}\rho\upsilon_k = 0. \qquad (37.8)$$

Склавши ці два рівняння, знайдемо

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\upsilon_i\upsilon_k + \delta_{ik} p\right) = 0. \qquad (37.9)$$

Це і є ***закон збереження імпульсу ідеальної рідини у диференціальній формі,*** де густина імпульсу (вектор) дорівнює $\rho\vec{\upsilon}$, а густина потоку імпульсу (тензор другого рангу) дорівнює

$$\Pi_{ik} = \rho\upsilon_i\upsilon_k + \delta_{ik} p. \qquad (37.10)$$

Істотно, що імпульс ідеальної рідини переноситься не тільки потоком речовини, чому відповідає внесок $\rho\upsilon_i\upsilon_k$, але й силами напружень, тобто тиском p. ***Закон збереження імпульсу ідеальної рідини у інтегральній формі***[10] запишемо з врахуванням (37.9), (37.10):

$$\int_V \frac{\partial \rho \upsilon_i}{\partial t} dV = -\oint_{\Sigma_V} \Pi_{ik} n_k d\sigma . \qquad (37.11)$$

Для ідеальної рідини існує ще один чисто гідродинамічний закон збереження. Для стаціонарної адіабатичної течії ідеальної рідини у потенціальному полі зовнішніх сил (36.22) рівняння руху (36.14) мають вигляд

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi\right) = \left[\vec{\upsilon}, rot\vec{\upsilon}\right]. \qquad (37.12)$$

Оскільки скалярний добуток цього вектора на вектор швидкості $\vec{\upsilon}$, або вектор $rot\vec{\upsilon}$ дорівнює нулю, приходимо до висновку, що величина

$$\frac{\upsilon^2}{2} + \omega + \phi = const \qquad (37.13)$$

зберігається вздовж лінії течії (36.18) та вздовж вихрових ліній (36.19). Треба підкреслити, що стала у правій частині (37.13) залишається сталою тільки вздовж лінії течії (або вихрової лінії). При переході до іншої лінії течії або іншої вихрової лінії ця стала змінюється. Співвідношення (37.13) називається ***інтегралом Коші-Бернуллі***.

Формулу (37.13) можна використати для знаходження швидкості витікання води з посудини під впливом сили ваги. Оскільки вода – нестислива рідина,

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad \phi = gz , \qquad (37.14)$$

---

[10] Відмітимо, що у законах збереження (34.2), (37.6) зміна скалярної величини (тензора нульового рангу), що характеризує середовище у об'ємі V, за одиницю часу дорівнює відповідному потоку векторної величини (тензора першого рангу) крізь поверхню Σ_V, що обмежує цей об'єм. У законі збереження (37.11) зміна векторної величини (тензора першого рангу) у об'ємі V за одиницю часу дорівнює потоку тензорної величини (тензора другого рангу) крізь поверхню Σ_V. Подібний зв'язок можна встановити також для тензорних полів наступних рангів.

де z – висота, на якій тиск дорівнює p, відповідно до формули (37.13)

$$\frac{\upsilon_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{\upsilon_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2, \qquad (37.15)$$

де індекс 1 відноситься до початку лінії течії, а індекс 2 – до кінця цієї ж лінії. Нехай лінія течії починається на нерухомій поверхні води ($\vec{\upsilon}_1=0,\ p_1=p_{атм}$), а кінець лінії течії знаходиться у отворі, з якого витікає вода ($p_2=p_{атм}$). Тоді з (37.15) випливає

$$\frac{\upsilon_2^2}{2}+gz_2=gz_1,$$

або

$$\upsilon_2=\sqrt{2gh}, \qquad (37.16)$$

де $h=z_1-z_2$. Цей результат є ***формулою Торрічеллі*** для витікання води з посудини.

Розглянемо рух ідеальної рідини, коли у будь-який момент часу виконується умова

$$rot\vec{\upsilon}=0. \qquad (37.17)$$

Такий рух називається ***потенціальним***, оскільки дає можливість виразити швидкість $\vec{\upsilon}$ через скалярну функцію (потенціал φ):

$$\vec{\upsilon}=\vec{\nabla}\varphi. \qquad (37.18)$$

Для нестаціонарної потенціальної течії з (36.14) маємо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2}{2}+\omega+\phi=f(t), \qquad (37.19)$$

де *f(t)* – довільна функція часу. Для нестисливої рідини, де

$$\rho=const,\quad \omega=\frac{p}{\rho},\quad div\vec{\upsilon}=0, \qquad (37.20)$$

цю функцію можна вважати константою або просто покласти рівною нулю, тобто поле тисків p знаходиться з точністю до довільної величини $f(t)$, яка не залежить від координат. Це випливає з того, що у рівняння руху (36.3а) входить не сам тиск, а його градієнт. Заміна φ на $\varphi_1+\int f(t)\,dt$ ніяк не відбивається на швидкості $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon}=\vec{\nabla}\varphi=\vec{\nabla}\varphi_1$$

та умовах нестисливості (37.20).

Для стаціонарного руху рівняння (37.19) має вигляд

$$\frac{\upsilon_1^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\phi=const \qquad (37.21)$$

і відоме як ***рівняння Бернуллі***. На відміну від інтеграла Коші-Бернуллі (37.13) константа у (37.21) являється сталою величиною вздовж усього об'єму рідини.

Розглянемо інтеграл вздовж замкненого контуру L

$$\Gamma=\oint_L \vec{\upsilon}\,d\vec{r}, \qquad (37.22)$$

який називається ***циркуляцією швидкості***. Нехай цей контур у рідині рухається разом з рідкими частинками. У момент часу t інтеграл (37.22) дорівнює

$$\Gamma(t)=\oint_L\left(\upsilon_x(\vec{r},t)dx+\upsilon_y(\vec{r},t)dy+\upsilon_z(\vec{r},t)dz\right). \qquad (37.23)$$

У момент часу $t'=t+dt$ частинки рідини займуть нові положення $\vec{r}\,'=\vec{r}+\vec{\upsilon}\,dt$, а їхні швидкості будуть $\vec{\upsilon}(\vec{r}\,',t')$, тому

$$\Gamma(t')=\oint_L\left(\upsilon_x(\vec{r}\,',t')dx+\upsilon_y(\vec{r}\,',t')dy+\upsilon_z(\vec{r}\,',t')dz\right)\approx$$

$$\approx\Gamma(t)+dt\oint_L\left(\upsilon_x d\,\upsilon_x+\upsilon_y d\,\upsilon_y+\upsilon_z d\,\upsilon_z\right)+dt\oint_L\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{dt}+\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\right)d\vec{r}. \qquad (37.24)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_L\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}+\oint_L d\,\frac{\upsilon^2}{2}. \qquad (37.25)$$

Останній інтеграл дорівнює нулю, як інтеграл вздовж замкненого контуру від повного диференціала. З урахуванням (36.14), (36.22) маємо

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_L\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}=0, \qquad (37.26)$$

тобто

$$\oint_L\vec{\upsilon}\,d\vec{r}=\int_{\Sigma_L}\vec{n}\,rot\,\vec{\upsilon}\,d\sigma=const, \qquad (37.27)$$

де Σ_L – поверхня, натягнена на контур L. Співвідношення (37.27) називається ***теоремою Томсона***: для ідеальної рідини циркуляція швидкості вздовж замкненого контуру, який рухається разом з рідиною, не змінюється. З теореми Томсона випливає, що у адіабатичній ідеальній рідині, яка знаходиться у полі потенціальних зовнішніх сил і у початковий момент покоїлася ($\vec{\upsilon}=0$), тобто у цей момент $rot\vec{\upsilon}=0$, не може виникнути вихрового руху – рух такої рідини буде потенціальним.

Задача 37.1. Знайти форму порожнистої вихрової лійки, що утворюється у ванні, коли з неї витікає вода.

Задача 37.2. Знайти оптимальну форму посудини для водяного годинника.

38. Обтікання кулі нестисливою ідеальною рідиною

Як приклад розв’язання рівнянь ідеальної рідини розглянемо рівномірний рух кулі радіуса R_0 зі швидкістю $\vec{\upsilon}_0$ у необмеженій нестисливій ідеальній рідині. На великих відстанях від кулі частинки рідини практично нерухомі, тому ця задача еквівалентна задачі про обтікання кулі стаціонарним потоком рідини, швидкість якого на нескінченності (на великих відстанях від кулі) дорівнює швидкості кулі

$$\vec{\upsilon}_\infty=\vec{\upsilon}_0. \qquad (38.1)$$

Рівняння руху для нестисливої рідини у відсутності зовнішніх сил мають вигляд (36.16), (37.20):

$$[\vec{\upsilon},rot\vec{\upsilon}]-\vec{\nabla}\frac{\upsilon^2}{2}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p=0, \qquad (38.2)$$

$$div\vec{\upsilon}=0. \qquad (38.3)$$

Крайові умови на поверхні кулі:

$$\upsilon_n(R_0)=0, \qquad (38.4)$$

(частинки рідини не можуть проникнути всередину кулі). Крайові умови на нескінченності:

$$\vec{\upsilon}(\vec{r})\to\vec{\upsilon}_\infty, \quad \text{коли } \vec{r}\to\infty. \qquad (38.5)$$

У випадку потенціального обтікання (37.17), (37.18) рівняння неперервності (38.3) є просто рівнянням Лапласа

$$\Delta\varphi=0, \qquad (38.6)$$

а рівняння (38.2) приводиться до рівняння Бернуллі (37.21)

$$\rho\frac{\upsilon^2}{2}+p=\rho\frac{\upsilon^2(R_0)}{2}+p_0(\vartheta), \qquad (38.7)$$

де $p_0(\vartheta)$ – тиск на поверхні нерухомої кулі.

Виберемо сферичну систему координат з початком у центрі сфери. Вісь z, від якої відлічують кут ϑ, направимо вздовж швидкості $\vec{\upsilon}_0$. Оскільки задача має осьову симетрію, потенціал φ повинен залежати тільки від змінних r і ϑ. З (38.4) та (38.5) випливають умови на потенціал φ:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R_0} = 0, \tag{38.8}$$

$$\varphi(r,\vartheta) \to \upsilon_0\, r\cos\vartheta, \quad \text{коли} \quad \vec{r} \to \infty. \tag{38.9}$$

Як відомо з математичної фізики, загальний розв'язок рівняння Лапласа у сферичних координатах має вигляд:

$$\varphi(r,\vartheta,\alpha) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm}r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right)P_l^m(\cos\vartheta)e^{im\alpha}, \tag{38.10}$$

де a_{lm}, b_{lm} – довільні константи, $P_l^m(\cos\vartheta)$ – приєднані поліноми Лежандра. З (38.9) виходить, що зі всієї суми (38.10) для нашої задачі треба залишити тільки внесок з $l = 1$:

$$\varphi(r,\vartheta) = \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right)\cos\vartheta. \tag{38.11}$$

Умова (38.5) дає

$$a_1 = \upsilon_0, \tag{38.12}$$

а з умови (38.8) випливає:

$$b_1 = \frac{\upsilon_0 R_0^3}{2}. \tag{38.13}$$

Звідси проекції швидкості у будь-якій точці рідини

$$\begin{aligned} \upsilon_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \upsilon_0\left[1 - \left(\frac{R_0}{r}\right)^3\right]\cos\vartheta, \\ \upsilon_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -\upsilon_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{r}\right)^3\right]\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{38.14}$$

На поверхні кулі величина швидкості дорівнює

$$\upsilon = |\upsilon_\vartheta| = \frac{3}{2}\upsilon_0\sin\vartheta. \tag{38.15}$$

Точки кулі, у яких швидкість дорівнює нулю (***критичні точки поверхні***), будуть при $\vartheta = 0$ та $\vartheta = \pi$. Максимальне значення швидкості на поверхні – при $\vartheta = \pi/2$. З (38.7) та (38.15) маємо розподіл тиску на поверхні кулі:

$$p_0(\vartheta) = p_0 - \frac{9}{8}\rho\upsilon_0^2 \sin^2 \vartheta, \qquad (38.16)$$

де p_0 – величина тиску у критичній точці. Тиск у будь-якій точці рідини визначається з (38.7) з урахуванням (38.14), (38.15) та (38.16). З формули (38.16) видно, що розподіл тиску на поверхні кулі симетричний відносно площини $\vartheta = \pi/2$. Звідси випливає, що повна сила тиску ідеальної рідини на поверхню кулі, яка рухається зі сталою швидкістю, дорівнює нулю, тобто куля, швидкість якої не змінюється, не зазнає опору з боку ідеальної рідини (***парадокс Ейлера-Даламбера***).

Цей результат, який вкрай суперечить спостереженням, пояснюється тим, що вище розглядалося безвихрове обтікання кулі, якого в дійсності не буває: з поверхні кулі відриваються вихори, які змінюють як характер течії, так і розподіл тиску на поверхні кулі.

39. Рух в’язкої рідини. Рівняння Нав’є-Стокса

У реальних рідинах та газах між частинками (атомами або молекулами) існують взаємодії, які зумовлюють опір цих середовищ зсувним зусиллям. З макроскопічної точки зору ці взаємодії проявляються у явищах переносу, пов’язаних з ***в’язкістю***, які визначають дисипацію енергії за рахунок тертя при деформаціях середовища. В’язкість при деформаціях зсуву називають ***зсувною***, при деформаціях всестороннього стиснення – ***об’ємною***.

Вперше на наявність внутрішнього тертя між частинками рідини вказав Ньютон у своїй книзі „Математичні основи натуральної філософії”. Він висунув гіпотезу, що сила внутрішнього тертя між частинками рідини пропорційна відносній швидкості цих частинок. Пізніше ця гіпотеза була представлена у вигляді формули, де сила внутрішнього тертя, віднесена до одиниці площини (напруження тертя τ), у якій лежить вісь x, пропорційна градієнту швидкості $\frac{d\upsilon_x}{dy}$ вздовж напряму, перпендикулярному цій площині:

$$\tau = \eta \frac{d\upsilon_x}{dy}, \qquad (39.1)$$

де υ_x – компонента швидкості рідини вздовж вісі x, y – координата, перпендикулярна поверхні. Коефіцієнт η називається ***коефіцієнтом внутрішнього тертя*** або ***в'язкістю*** рідини.

З точки зору закону збереження імпульсу в'язкість рідини проявляється порівняно з ідеальною рідиною у наявності додатного незворотного переносу імпульсу з місць з більшою до місць з меншою швидкістю, тобто тензор густини потоку імпульсу у в'язкій рідині повинен мати вигляд

$$\Pi_{ik} = \rho\upsilon_i\upsilon_k + p\delta_{ik} - \sigma'_{ik}\ , \tag{39.2}$$

де σ'_{ik} – ***тензор в'язких напружень***, який визначає частину потоку імпульсу, не зв'язану безпосередньо з переносом імпульсу разом з масою рідини. Наявність цього тензору проявляється тільки тоді, коли різні ділянки рідини рухаються з різною швидкістю, тобто коли має місце рух частин рідини одна відносно одної. Внаслідок цього тензор σ'_{ik} повинен залежати від похідних від швидкості за координатами. Для не дуже великих градієнтів швидкостей ця залежність повинна включати тільки похідні першого порядку, причому самі похідні повинні входити лінійно (***ньютонові рідини***). Усі ці умови звичайно виконуються при дозвукових течіях рідин або газів. Тензор σ'_{ik} повинен бути нульовим не тільки тоді, коли швидкість $\vec{\upsilon} = const$, але й тоді, коли рідина як ціле рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = const$, оскільки при такому русі внутрішнього тертя у рідині не існує. Як вказувалось у п.33, тензор механічних напружень суцільного середовища p_{ik} повинен бути симетричним (33.25). Для в'язкої рідини це твердження відноситься і до тензору σ'_{ik}:

$$\sigma'_{ik} = \sigma'_{ki}, \tag{39.3}$$

оскільки для такого середовища тензор механічних напружень має вигляд

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}\,. \tag{39.4}$$

З компонент $\dfrac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}$ можна скласти тільки дві симетричні комбінації: $\delta_{ik}\dfrac{\partial\upsilon_l}{\partial x_l}$ та $\dfrac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}$. Залежність σ'_{ik} від цих комбінацій зручно представити у вигляді, аналогічному (33.36),

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right) + \xi\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}, \qquad (39.5)$$

де η – коефіцієнт зсувної в'язкості, ξ – коефіцієнт об'ємної в'язкості. Оскільки в'язка рідина ізотропна, ці коефіцієнти можуть бути лише скалярами.

Рівняння руху в'язкої рідини отримаємо підстановкою (39.4) у (35.18а):

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_k\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right). \qquad (39.6)$$

Це найзагальніша форма рівнянь руху в'язкої рідини. Взагалі кажучи, коефіцієнти η, ξ можуть бути функціями тиску p та температури T. Коли останні величини залежать від координат, η і ξ також залежать від координат, і їх не можна просто виносити за знак похідної.

Коли коефіцієнти η та ξ постійні, рівняння (39.6) у векторній формі має вигляд:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\right) = \rho\vec{f} - grad\, p + \eta\Delta\vec{\upsilon} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)grad\, div\,\vec{\upsilon}\,. \qquad (39.7)$$

Воно називається ***рівнянням Нав'є-Стокса***. Разом з рівнянням неперервності (35.18б) та рівнянням енергії (35.18в) з урахуванням (39.4), (39.5) повна система рівнянь руху в'язкої рідини або газу має вигляд:

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{\upsilon} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}\, div\,\vec{\upsilon}, \qquad (39.8а)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\,\vec{\upsilon} = 0, \qquad (39.8б)$$

$$\rho\frac{du}{dt} = div\left(\gamma\vec{\nabla}T\right) - p\, div\,\vec{\upsilon} + \sigma'_{ik}\upsilon_{ik}, \qquad (39.8в)$$

де σ'_{ik} та υ_{ik} визначені формулами (39.5) та (35.10). До цих рівнянь треба додати залежність u, η, ξ, γ від термодинамічних параметрів та рівняння стану речовини.

Для нестисливої в'язкої речовини ($\rho = const$) ця система рівнянь спрощується

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\,\Delta\vec{\upsilon}\,, \qquad (39.9а)$$

$$div\,\vec{\upsilon} = 0\,, \qquad (39.9б)$$

де $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ – кінематична в'язкість.

Сили міжмолекулярної взаємодії, які існують у будь-якій речовині, призводять до того, що прилеглий до твердої поверхні шар в'язкої рідини повністю утримується нею (ніби прилипає до поверхні). Це означає, що швидкість в'язкої рідини на нерухомій поверхні Σ повинна дорівнювати нулю

$$\vec{\upsilon}\big|_{\Sigma} = 0\,, \qquad (39.10)$$

а на рухомій – швидкості руху $\vec{V}^{\Sigma}$ твердої поверхні Σ:

$$\vec{\upsilon}\big|_{\Sigma} = \vec{V}^{\Sigma}. \qquad (39.11)$$

На межі поділу двох в'язких рідин, які не змішуються, швидкості обох рідин повинні бути однаковими

$$\vec{\upsilon}^{(1)} = \vec{\upsilon}^{(2)}, \qquad (39.12)$$

а сили, з якими ці рідини діють одна на одну, повинні бути однаковими за величиною та протилежно спрямованими. Оскільки, згідно з (33.9) та третім законом Ньютона, сила, яка діє на одиницю елемента поверхні $d\vec{\sigma}$, дорівнює

$$dF_i = -p_{ik}d\sigma_k = -p_{ik}n_k\,d\sigma\,, \qquad (39.13)$$

де n_i – одиничний вектор нормалі до поверхні, на межі двох рідин

$$n_i\,p_{ik}^{(1)} = n_i\,p_{ik}^{(2)}. \qquad (39.14)$$

На вільній поверхні рідини повинна виконуватись умова

$$p_{ik}n_k = -pn_i + \sigma'_{ik}n_k = 0\,. \qquad (39.15)$$

Задача 39.1. Записати рівняння Нав'є-Стокса у декартових, циліндричних та сферичних координатах.

40. Течія Пуазейля

Наявність конвективної похідної $\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}$ істотно ускладнює структуру рівняння Нав'є-Стокса (39.9а). Тому точні розв'язки рівняння руху в'язкої рідини вдається знайти тільки в декількох окремих випадках. Одним з них є стаціонарна течія нестисливої в’язкої рідини вздовж прямої труби круглого перерізу (***течія Пуазейля***).

Спрямуємо вісь z вздовж труби і будемо вважати, що об’ємні сили $\vec{f}$ відсутні. Розглянемо стаціонарний рух рідини вздовж труби радіуса R_0, коли швидкість має тільки одну компоненту υ_z. У цьому випадку рівняння (39.9) мають вигляд:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \upsilon_z\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\,\Delta\upsilon_z, \tag{40.1}$$

$$\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0. \tag{40.2}$$

Крайова умова задачі

$$\upsilon_z\left(R_0\right)=0. \tag{40.3}$$

Підстановка (40.2) у (40.1) спрощує рівняння для z-складової швидкості:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\nu\,\Delta\upsilon_z. \tag{40.4}$$

З перших двох рівнянь (40.1) випливає, що тиск p залежить тільки від z, а з рівняння (40.2) виходить, що

$$\upsilon_z=\upsilon_z(x,y). \tag{40.5}$$

Таким чином, стаціонарний рух в’язкої рідини вздовж труби описується рівнянням

$$\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial y^2}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{40.6}$$

у декартових змінних x, y, z або рівнянням

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\upsilon_z}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{40.7}$$

у циліндричних змінних R, φ, z. З міркувань симетрії випливає, що υ_z не може залежати від кутової змінної φ. Тому рівняння (40.7) має вигляд:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\upsilon_z}{dR}\right)=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{40.8}$$

Оскільки у цьому рівнянні змінні відокремлені (ліва частина залежить від R, а права – від z), кожна з частин може бути тільки константою:

$$\frac{dp}{dz} = C_1, \tag{40.9}$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\upsilon_z}{dR}\right) = \frac{C_1}{\eta}. \tag{40.10}$$

Після інтегрування (40.9) та (40.10) маємо

$$p = C_1 z + p_0, \tag{40.11}$$

$$\upsilon_z = \frac{C_1}{4\eta}R^2 + C_2 \ln R + C_3, \tag{40.12}$$

де p_0, C_2, C_3 – константи інтегрування. На вісі труби швидкість рідини повинна бути скінченою, тому $C_2 = 0$. Константа C_3 знаходиться з крайової умови (40.3):

$$C_3 = -\frac{C_1}{4\eta}R_0^2. \tag{40.13}$$

Константа p_0 дорівнює тиску рідини на початку труби (коли $z = 0$), константа C_1 визначається тиском p_1 рідини наприкінці труби довжини l:

$$p_1 = C_1 l + p_0, \tag{40.14}$$

тому

$$C_1 = \frac{p_1 - p_0}{l} = -\frac{\Delta p}{l}, \tag{40.15}$$

тобто ця стала характеризує перепад тиску на одиницю довжини труби.

Таким чином, розв'язок задачі має вигляд

$$\vec{\upsilon} = (0,0,\upsilon_z), \quad \upsilon_z = \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R_0^2 - R^2\right), \quad p = -\frac{\Delta p}{l}z + p_0, \tag{40.16}$$

де Δp – різниця тиску на кінцях труби довжини l.

Маса рідини, яка протікає у одиницю часу через поперечний переріз труби Σ (повна витрата рідини Q), визначається ***формулою Пуазейля***:

$$Q = \int_{\Sigma} \rho \upsilon_z d\sigma = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l}R^4. \tag{40.17}$$

Ця формула використовується для експериментального визначення в'язкості рідини, оскільки усі інші величини у (40.17) можна виміряти незалежно від течії.

Задача 40.1. Знайти розподіл швидкості та повну витрату нестисливої в'язкої рідини, яка стаціонарно тече вздовж простору між двома коаксіальними прямими трубами круглого перерізу.

41. Обтікання кулі в'язкою рідиною

Розглянемо тепер рівномірний рух кулі радіуса R_0 зі швидкістю $\vec{\upsilon}_0$ у в'язкій нестисливій рідині. Так само, як і у випадку ідеальної рідини, будемо вважати, що стаціонарний потік в'язкої рідини обтікає нерухому кулю. Рівняння руху (39.9) у відсутності об'ємної сили $\vec{f}$ мають вигляд

$$\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\,\Delta\vec{\upsilon}\,, \tag{41.1}$$

$$div\,\vec{\upsilon} = 0\,. \tag{41.2}$$

Перш ніж знаходити розв'язок цих рівнянь, запишемо (41.1) у безрозмірній формі. Для цього помножимо рівняння (41.1) на $\frac{R_0}{\upsilon_0^2}$ та введемо безрозмірні величини:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon_0}, \quad \vec{r}\,' = \frac{\vec{r}}{R_0}, \quad P = \frac{p}{\rho\upsilon_0^{\ 2}},$$
$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial\vec{r}} = \frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial\vec{r}\,'} \equiv \frac{\vec{\nabla}'}{R_0}, \quad \Delta' = \vec{\nabla}'\vec{\nabla}'\,. \tag{41.3}$$

Тоді рівняння (41.1), (41.2) приймуть вигляд

$$\left(\vec{u}\,\vec{\nabla}'\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}'P + \frac{\nu}{\upsilon_0 R_0}\Delta'\vec{u}, \qquad \vec{\nabla}'\vec{u} = 0\,. \tag{41.4}$$

Безрозмірна величина

$$\frac{\upsilon_0 R_0}{\nu} = \mathrm{Re} \tag{41.5}$$

називається ***числом Рейнольдса***. З (41.4) випливає, що $\vec{u}$ та p залежать від трьох змінних r', ϑ, α та від параметра Re.

Рівняння (41.1) нелінійне і його точний розв'язок невідомий. Для малих чисел Рейнольдса (коли велика в'язкість рідини) можна знайти розв'язок цього рівняння у вигляді ряду за степенями Re, обмежуючись першим внеском:

$$\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon_0}=\vec{u}_0+\mathrm{Re}\vec{u}_1+\dots\;. \tag{41.6}$$

Мале значення числа Re позначає, що внесок $\nu\Delta\vec{\upsilon}$ у (41.1) великий порівняно з конвективною похідною $\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}$, і останньою можна знехтувати, тобто це рівняння стає лінійним:

$$\vec{\nabla}p=\eta\Delta\vec{\upsilon}\,. \tag{41.7}$$

Якщо до цього рівняння застосувати операцію div, тоді з урахуванням рівняння (41.2) маємо

$$\Delta p=0\,. \tag{41.8}$$

Так само, як і у випадку ідеальної рідини, використовуємо сферичну систему координат і приходимо до висновку, що усі величини залежать тільки від r та ϑ.

Розв’язок (41.8), який задовольняє крайовим умовам, має вигляд

$$p=\frac{C_1}{r^2}\cos\vartheta+p_\infty, \tag{41.9}$$

де C_1, p_∞ – константи.

З міркувань симетрії поле швидкостей має дві ненульові компоненти υ_r та υ_ϑ. Щоб знайти ці компоненти, запишемо проекцію рівняння (41.7) на радіальний напрям

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\eta\left\{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r})+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial\upsilon_r}{\partial\vartheta})\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{r^2}\left(\upsilon_r+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\upsilon_\vartheta)\right)\right\} \tag{41.10}$$

та рівняння неперервності (41.2)

$$div\,\vec{\upsilon}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\upsilon_r)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\upsilon_\vartheta)=0\,. \tag{41.11}$$

Після підстановки (41.11) у (41.10) останнє рівняння матиме вигляд:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\eta}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^2\upsilon_r\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\upsilon_r}{\partial\vartheta}\right)\right). \tag{41.12}$$

Розв’язок цього рівняння будемо шукати у формі

$$\upsilon_r=\frac{f(r)}{r}\cos\vartheta\,. \tag{41.13}$$

Після підстановки (41.9), (41.13) у (41.12) знайдемо звичайне диференціальне рівняння для $f(r)$:

$$r^2 f'' + 2rf' - 2f = -\frac{2C_1}{\eta}, \tag{41.14}$$

де штрих визначає похідну за змінною r. Розв’язок рівняння (41.12) складається з частинного розв’язку неоднорідного рівняння та загального розв’язку однорідного рівняння:

$$f(r) = \frac{C_1}{\eta} + C_2 r + \frac{C_3}{r^2}. \tag{41.15}$$

Таким чином, радіальна компонента швидкості υ_r має вигляд

$$\upsilon_r = \left(\frac{C_1}{\eta r} + C_2 + \frac{C_3}{r^3}\right)\cos\vartheta. \tag{41.16}$$

Компоненту υ_ϑ найпростіше знайти з рівняння неперервності (41.11). Якщо цю компоненту шукати у вигляді

$$\upsilon_\vartheta = f_1(r)\sin\vartheta, \tag{41.17}$$

після підстановки (41.13) та (41.17) у (41.11) маємо рівняння

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{f}{r}\right) + \frac{2f_1}{r} = 0,$$

звідки з врахуванням (41.15) знаходимо

$$f_1(r) = -\frac{C_1}{2\eta r} - C_2 + \frac{C_3}{2r^3}. \tag{41.18}$$

Константи C_1, C_2, C_3 у (41.16), (41.18) знайдемо з крайових умов:

$$\begin{gathered} \upsilon_r = \upsilon_\vartheta = 0, \quad \text{коли} \quad r = R_0, \\ \upsilon_r = \upsilon_0\cos\vartheta, \quad \upsilon_\vartheta = -\upsilon_0\sin\vartheta, \quad \text{коли} \quad r \to \infty. \end{gathered} \tag{41.19}$$

У результаті розв’язок задачі має вигляд:

$$\begin{gathered} \upsilon_r = \upsilon_0\left(1 - \frac{3}{2}\frac{R_0}{r} + \frac{R_0^3}{2r^3}\right)\cos\vartheta, \\ \upsilon_r = \upsilon_0\left(-1 + \frac{3}{4}\frac{R_0}{r} + \frac{R_0^3}{4r^3}\right)\sin\vartheta, \\ p = -\frac{3}{2}\eta\upsilon_0\frac{R_0}{r^2}\cos\vartheta + p_\infty. \end{gathered} \tag{41.20}$$

Користуючись цим розв’язком легко встановити силу гідродинамічного тиску в’язкої рідини на сферичну частинку.

Згідно з (33.9) сила, яка діє на поверхню Σ рідини, що обмежує кулю, дорівнює:

$$F_i^{поверх} = \oint_{\Sigma} p_{ik} n_k d\sigma . \qquad (41.21)$$

У відповідності з третім законом Ньютона така сама сила, але з протилежним знаком, діє з боку в'язкої рідини на поверхню кулі Σ:

$$F_i = -\oint_{\Sigma} p_{ik} n_k d\sigma , \qquad (41.22)$$

де у тензор напружень p_{ik} в'язкої нестисливої рідини

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right) \qquad (41.23)$$

треба підставити (41.20). Результат має вигляд (***формула Стокса***):

$$\vec{F} = 6\pi R_0 \eta \vec{\upsilon}_0 . \qquad (41.24)$$

Ця формула часто використовується як у фізичних, так і у технічних розрахунках.

Задача 41.1. При малих числах Рейнольдса для нестисливої в'язкої рідини ($\rho = const$) рівняння Нав'є-Стокса у векторній формі має вигляд:

$$\vec{\nabla} p = -\eta\ rot\ rot\ \vec{\upsilon} . \qquad (41.25)$$

Знайти проекції цього рівняння на орти сферичної системи координат.

Задача 41.2. Те ж саме для циліндричної системи координат.

Задача 41.3. Знайти формулу Стокса (41.24), користуючись співвідношеннями (41.22), (41.23) та розв'язком (41.20).

Література

1. Голдстейн Г. Классическая механика. М. 1957; 1975.
2. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. МГУ.1974.
3. Федорченко А.М. Теоретична фізика: т.1. Класична механіка і електродинаміка. К. 1992.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М. 1973; 2004.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.1974.
6. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. МГУ. 1991; 2002.
7. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборкик задач по классической механике. М. 1977; 2001.
8. Тер-Хаар Д. Основы гамильтоновой механики. М. 1974.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М. 1986; 2001.
10. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.I, II. М. 1963.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. 1973.
12. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. 1955.

Зміст